Devoir Surveillé n^o 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 octobre 2021

Exercice 1

1. Comme d'habitude, on a trois propriétés à vérifier :
   - on peut toujours écrire $f = id^{-1} \circ f \circ id$ (l'application identité étant sa propre réciproque, bien entendu) ce qui prouve que $f \sim f$ et donc que $\sim$ est une relation réflexive.
   - si $f = h^{-1} \circ g \circ h$, on peut composer la relation à gauche par h et à droite par h^{-1} pour obtenir $h \circ f \circ h^{-1} = g$. Comme h^{-1} est une application bijective de réciproque h, cela prouve que $g \sim f$, et la relation $\sim$ est donc symétrique.
   - supposons enfin que $f \sim g$ et $g \sim k$, on peut alors trouver deux applications bijectives h et i telles que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ et $g = i^{-1} \circ k \circ i$. En remplaçant dans la première égalité, on a donc $f = h^{-1} \circ i^{-1} \circ k \circ i \circ h = (h \circ i)^{-1} \circ f \circ (h \circ i)$ (en utilisant la relation vue en cours $(h \circ i)^{-1} = i^{-1} \circ h^{-1}$). L'application $h \circ i$ étant bijective comme composée d'applications bijectives, cela prouve que $f \circ k$, la relation $\sim$ est donc transitive.

   La relation étant réflexive, symétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'équivalence.
2. Une application g en relation avec la fonction nulle f vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h^{-1} \circ f \circ h(x) = h^{-1}(0)$ (puisque $f(h(x)) = 0$ indépendamment de la fonction h), donc la fonction g est nécessairement constante. Réciproquement, toute fonction constante égale à un certain réel a est bien en relation avec la fonction nulle, il suffit en fait pour le prouver de trouver une fonction bijective h vérifiant $h^{-1}(0) = a$. En posant $h(x) = x - a$, la fonction h est bijective (c'est vraiment évident) et sa réciproque, définie par $h^{-1}(x) = x + a$, vérifie bien $h^{-1}(0) = a$. Finalement, la classe d'équivalence de f contient toutes les fonctions constantes.
3. C'est encore plus simple : quelle que soit l'application bijective h, $h^{-1} \circ id \circ h = h^{-1} \circ h = id$, donc la classe d'équivalence de l'application identité est réduite à elle-même.
4. On sait qu'une composée d'applications injectives est injective. Si $g = h^{-1} \circ f \circ h$, avec f injective et h et h^{-1} bijectives (donc a fortiori injectives), g est donc bien injective.
5. Copier-coller de la réponse précédente en remplaçant toutes les occurrences du mot « injective » par « surjective ».
6. Bien sûr que non, on a vu plus haut que l'identité n'était en relation avec personne, donc en particulier avec aucune autre application bijective qu'elle-même.
7. Si f est bijective et $g = h^{-1} \circ f \circ h$, alors g est bijective comme composée de trois applications bijectives, et $g^{-1} = (h^{-1} \circ f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1} \circ h$, donc $g{-}1 \sim f^{-1}$ (et, curieusement, c'est la même application bijective h qui effectue le lien entre les applications f et g, et entre leurs réciproques).
8. L'énoncé laisse clairement entendre que $n \in \mathbb{N}$, mais la relation resterait vraie pour tout entier négatif en exploitant la question précédente. Supposons donc que $g = h^{-1} \circ f \circ h$, alors $g \circ g = h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ id \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^2 \circ h$, ce qui prouve que $g^2 \circ f^2$. Il n'y a plus qu'à itérer le procédé, en prouvant simplement par récurrence que $g^n = h^{-1} \circ f^n \circ h$. On a déjà vérifié l'initialisation aux rangs 1 et 2 mais ça marche aussi au rang 0 : $g^0 = id = h^{-1} \circ id \circ h$ est vrai. Supposons donc la propriété vraie au rang n, alors

$g^{n+1} = g^n \circ g = h^{-1} \circ f^n \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^n \circ f \circ h = h^{-1} \circ f^{n+1} \circ h$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Bien entendu, la relation obtenue prouve que $f^n \sim g^n$ (encore une fois, c'est toujours la même bijection h qui effectue la relation).

9. C'est un calcul classique, résolvons l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$, c'est-à-dire $e^x + e^{-x} = 2y$. Après un changement de variable $X = e^x$ et une multiplication par e^x (qui ne peut jamais s'annuler), on se ramène à $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$, qui est manifestement toujours positif. On a donc deux solutions $X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$, et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$. La première solution est toujours strictement négative (car $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$, donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ quel que soit le signe de y), on il ne reste donc qu'une seule solution à notre équation : $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = h(y)$, ce qui prouve bien que h est la réciproque de sh.
10. On se doute qu'on doit avoir $g = \mathrm{sh} \circ f \circ h$ (ou le contraire), mais plutôt que de montrer directement l'égalité sous cette forme, il est un peu plus facile de montrer que $g \circ \mathrm{sh} = \mathrm{sh} \circ f$ (ce qui est équivalent en composant par sh à droite), autrement dit que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}$. En utilisant la relation $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, on a $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}$ (car ch est toujours positive), il suffit donc de prouver que $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$ (formule qui devrait vous rappeler une certaine formule de duplication du sinus). C'est assez facile : $2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x) = \dfrac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x)$. Les fonctions f et g sont donc bien en relation pour $\sim$.

Exercice 2

1. La fonction f n'est pas définie si $x^2 - x - 2 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 1 + 9$, et admettant pour solutions $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$.
2. Calculons donc ces images : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left|\dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{9}{4}}\right| = \dfrac{10}{9}$, et $f(2\sqrt{2}) = \left|\dfrac{2+2\sqrt{2}}{6-2\sqrt{2}}\right| = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$ (au moment où on a supprimé la valeur absolue, numérateur et dénominateur de la fraction étaient positifs).
3. Pour les antécédents de 1, il faut résoudre l'équation $|x+2| = |x^2 - x - 2|$, ce qui donne deux possibilités : soit $-x-2 = x^2 - x - 2$, donc $x = 0$, soit $x + 2 = x^2 - x - 2$, donc $x^2 - 2x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Le réel 1 a donc trois antécédents par f : $1 - \sqrt{5}$, 0 et $1 + \sqrt{5}$. Pour -1, aucun calcul à faire, il ne peut pas avoir d'antécédents puisque f ne prend que des valeurs positives.
4. On se ramène à l'inéquation $|x+2| - |x^2 - x - 2| \geqslant 0$, et on peut par exemple faire un tableau :

x	$-\infty$ ... -2	-2 ... -1	-1 ... 2	2 ... $+\infty$
$\|x+2\|$	$-x-2$ ‖ 0	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\|x^2-x-2\|$	x^2-x-2	x^2-x-2 ‖ 0	$-x^2+x+2$ ‖ 0	x^2-x-2
$\|x+2\| - \|x^2-x-2\|$	$-x^2$	$-x^2+2x+4$	x^2	$-x^2+2x+4$

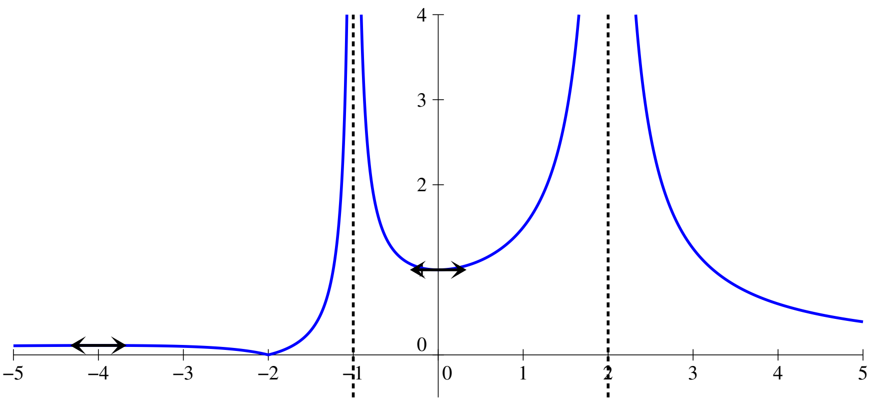
L'inéquation n'est jamais vérifiée sur $]-\infty, -2]$, et elle l'est toujours sur $]-1, 2[$. Sur les deux intervalles restants, on a étudié le trinôme $-x^2 + 2x + 4$, qui est positif entre ses racines, donc sur $[1-\sqrt{5}, -1[$ (le nombre $1 - \sqrt{5}$ étant compris entre -2 et -1) et sur $]2, 1+\sqrt{5}]$. Conclusion : $\mathcal{S} = [1-\sqrt{5}, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, 1+\sqrt{5}] = [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]\backslash\{-1, 2\}$.

5. Le quotient $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$ (quotient des termes de plus haut degré), donc f aussi. En -1 et en 2, le dénominateur s'annule mais pas le numérateur, ce qui assure que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ (la valeur absolue étant de toute façon positive).

6. Posons $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ et étudions les variations et le signe de g. La fonction g est dérivale sur $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{x^2-x-2-(2x-1)(x+2)}{(x-2-x-2)^2} = \dfrac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{x(-x-4)}{(x^2-x-2)^2}$. On calcule en passant $g(0) = -1$ et $g(-4) = \dfrac{-2}{18} = -\dfrac{1}{9}$. De plus, la fonction g change de signe en -2, -1 et 2, elle est négative sur $]-\infty,-2]$ et sur $]-1,2[$ et positive sur $[-2,-1[$ et sur $]2,+\infty[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$+\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g	0	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
f	0	↗	$\frac{1}{9}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

7. Et une jolie courbe :



Exercice 3

1. (a) La fonction g est certainement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = e^x - 1$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, admettant un minimum en 0. Comme $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$, la fonction est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   (b) Il s'agit de la convexité de la fonction exponentielle : la tangente à la courbe de l'exponentielle en son point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$, et la courbe est toujours située au-dessus de ses tangentes, ce qui prouve que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

2. (a) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$. Cette dérivée est du signe de $1 - x$, donc h est croissante sur $]-\infty,-1]$ puis décroissante sur $[1,+\infty[$, admettant pour maximum $h(1) = e - 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, et comme

$h(x) = 2e^x - xe^x - 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée), on aura $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant pour la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

(b) L'énoncé était manifestement buggué à cet endroit : étant continue et strictement monotone sur chacun des deux intervalles, h est bijective de $]-\infty, 1]$ vers $]-1, e-1]$, puis de $[1, +\infty[$ vers $]-\infty, e-1]$. Le réel $e-1$ étant strictement positif, 0 appartient à chacun des deux intervalles images, et l'équation $h(x) = 0$ admet donc **deux** solutions, l'une sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qu'on notera donc α, et la deuxième sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ qu'on va noter β. On peut même noter que $h(0) = 1 > 0$, donc $\beta < 0$.

(c) La fonction h sera positive dans l'intervalle $[\beta, \alpha]$ et négative sur chacun des deux intervalles $]-\infty, \beta]$ et $[\alpha, +\infty[$.

3. La seule chose qui pourrait empêcher f d'être définie sur $\mathbb{R}$ serait l'annulation de son dénominateur. Or, on a rappelé plus haut que l'inégalité $e^x \geqslant x+1$ était valable sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori $e^x > x$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

4. Pas de forme indéterminée en $-\infty$, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De l'autre côté, on va factoriser numérateur et dénominateur par e^x pour obtenir $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (croissance comparée classique), on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$, et l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$.

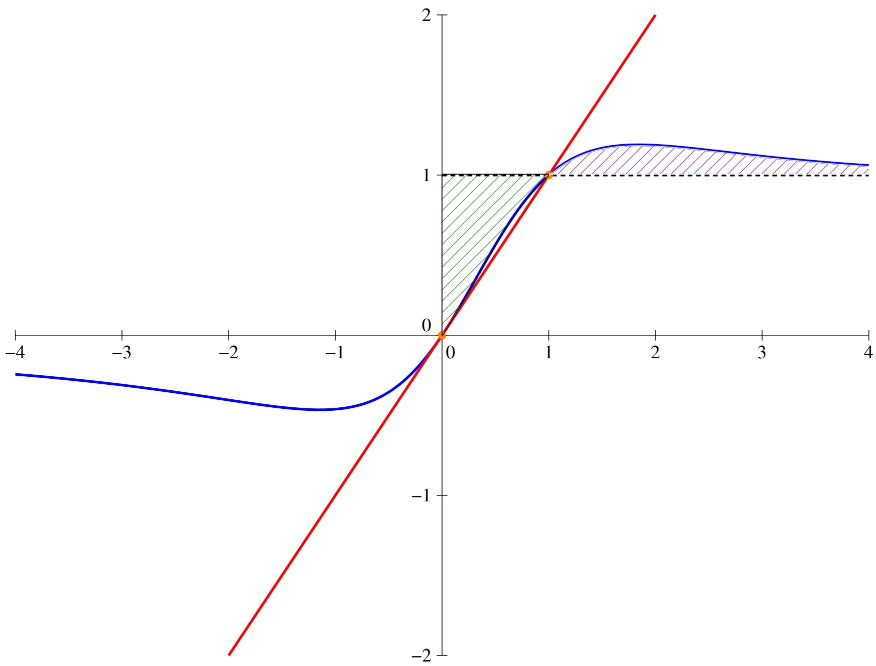
5. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x-1)^2}{(e^x-x)^2} = \dfrac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x-x)^2} = \dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$. Cette dérivée est donc du signe de $h(x)$, qu'on a étudié plus haut. On ne peut bien entendu pas calculer la valeur du minimum et du maximum de f, on se contentera donc du tableau suivant :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

6. Pour cela, on calcule classiquement $f(x) - x = \dfrac{e^x-1}{e^x-x} - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$ $= \dfrac{e^x(1-x) + x^2 - 1}{e^x - x} = \dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{e^x-x}$. Le dénominateur est toujours positif, le facteur $x + 1 - e^x$ est toujours négatif d'après la première question de l'exercice, donc $f(x) - x$ est du signe opposé à celui de $x - 1$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}$ sera au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, et en-dessous sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Les des courbes se coupent au point de coordonnées $(1, 1)$, mais aussi au point de coordonnées $(0, 0)$ puisque le facteur $x + 1 - e^x$ s'annule (sans changer de signe) en 0.

7. On calcule $f(0) = 0$, puis $f'(0) = h(0) = 2e^0 - 1 = 1$, et on déduit que la tangente en question a pour équation $y = x$. Autrement dit, il s'agit tout simplement de la droite (D).

8. On est bien sûr obligés de placer aléatoirement le maximum et le minimum, par contre, on fait attention à bien respecter les asymptotes horizontales et la position relative par rapport à la droite (D) (les points d'intersection sont indiqués en orange ci-dessous) :



9. Comme f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ (en posant $u(x) = e^x - x$, on a bien $u'(x) = e^x - 1$), et que la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$, f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \ln(e^x - x)$. On en déduit que $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = [\ln(e^x - x)]_0^1 = \ln(e-1) - \ln(1) = \ln(e-1)$ (valeur qu'on ne peut pas vraiment estimer précisément).
10. Calculons donc : $u_n = [\ln(e^x - x) - x]_0^n = \ln(e^n - n) - n$ puisque notre primitive s'annule en 0. Pour déterminer la limite, écrivons $\ln(e^n - n) = \ln(e^n(1 - ne^{-n})) = n + \ln(1 - ne^{-n})$. On en déduit que $u_n = \ln(1 - ne^{-n})$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$, dont on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
11. Le nombre $u_n - u_1$ est égal à $\displaystyle\int_1^n (f(t) - 1)\,dt$, ce qui représente l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite horizontale d'équation $y = 1$, entre les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n$ (aire hachurée en violet sur le graphique précédent, jusqu'à l'abscisse $x = 4$ où s'arrête la représentation). D'après la question précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - u_1 = -u_1$, ce qui prouve que l'aire hachurée en violet, si on fait tendre la limite supérieure vers $+\infty$, va être égale à l'aire hachurée en vert située entre $\mathcal{C}$, la droite $y = 1$ et $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

Exercice 4

Essayons d'organiser un peu notre étude :

- **domaine de définition** : on doit déjà avoir $x \in [-1, 1]$ pour que $1 - x^2$ soit positif et donc que la racine carrée intérieure existe. Ensuite, il faut en plus que $1 - 2x\sqrt{1 - x^2}$ soit positif, donc que $2x\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$. Cette condition est évidemment vérifiée lorsque $x < 0$, reste à gérer le cas des valeurs de x entre 0 et 1. Dans ce cas, on peut élever au carré : $2x\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$ si $4x^2(1 - x^2) \leqslant 1$, donc $4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0$. Or, $4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2$ est toujours positif, ce qui prouve qu'en fait $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.

- **domaine de dérivabilité** : f ne sera pas dérivable aux points qui annulent l'une des racines carrées qui la composent. Ainsi, f ne sera pas dérivable en 1 ni en -1 à cause de la présence du terme $\sqrt{1-x^2}$. De plus, la racine carrée globale s'annule lorsque $x \geqslant 0$ et $2x^2-1=0$, donc pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- **étude des variations** : posons $g(x) = 1-2x\sqrt{1-x^2}$, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur son domaine de définition, f aura les mêmes variations que g. La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$, et $g'(x) = -2\sqrt{1-x^2} - 2x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$. Notre dérivée est donc du signe de $2x^2-1$, c'est-à-dire qu'elle est négative sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et positive le reste du temps. On sait déjà que le minimum de f en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ vaut 0 (et que f ne sera pas dérivable à cet endroit), le maximum de l'autre côté vaut $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
- **calcul de valeurs supplémentaires** : on peut ajouter $f(0) = 1$, et bien sûr $f(-1) = f(1) = 1$.
- **tangentes en 1 et en -1** : comme on a $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2f(x)}$, on constate facilement que $\lim\limits_{x \to \pm 1} f'(x) = +\infty$, ce qui prouve que la courbe représentative de f admettra des tangentes verticales en 1 et en -1. Pour la valeur $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ où f n'est pas non plus dérivable a priori, calculer la limite de f' est beaucoup plus compliqué car à la fois f et g' s'annulent, et on a aucun moyen simple de déterminer la limite du quotient, on admettra donc que la courbe aura une forme « en pointe » à cet endroit-là.
- **étude de la convexité** : hum, non, en fait, ça va être vraiment trop affreux, on ne peut pas se contenter de calculer g'' et même ce calcul-là serait assez désagréable. On constatera sur la courbe ci-dessous que la fonction est en fait concave sur $\left[-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis convexe sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.
- **courbe** : finalement, seules les variations étaient vraiment à étudier en détail avant de tracer la courbe :