Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

9 octobre 2021

Exercice 1

On note dans tout cet exercice E l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et F le sous-ensemble de E constitué des applications bijectives. Dans tout l'exercice on considèrera qu'une application est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (pas de valeur interdite). On définit enfin une relation binaire $\sim$ sur l'ensemble E de la façon suivante : $f \sim g$ si et seulement si $\exists h \in F$, $g = h^{-1} \circ f \circ h$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.
2. Quelle est la classe d'équivalence de la fonction f constante égale à 0 pour cette relation ?
3. Quelle est la classe d'équivalence de l'application id pour cette relation ?
4. On suppose que f est une application injective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi injective.
5. On suppose que f est une application surjective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi surjective.
6. Deux applications bijectives appartiennent-elles nécessairement à la même classe d'équivalence ?
7. Montrer que, si $f \in F$ et $f \sim g$, alors $g \in F$, et $f^{-1} \sim g^{-1}$.
8. En notant $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, montrer que $f \sim g \Rightarrow f^n \sim g^n$.
9. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est réciproque de la fonction sh.
10. À l'aide de la question précédente, montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice la fonction définie par $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-x-2}\right|$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer l'image par f du réel $\dfrac{1}{2}$, puis celle de $2\sqrt{2}$ (on simplifiera ce qui peut l'être).
3. Déterminer les antécédents éventuels par f de 1, puis de -1.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
6. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3

On cherche à étudier dans cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Pour tout réel x, on pose $g(x) = e^x - x - 1$.
   (a) Étudier les variations de g en calculant sa dérivée, et en déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Rappeler précisément quel résultat du cours aurait pu permettre d'obtenir ce signe sans recourir à une étude de variations.
2. On pose dans cette question $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.
   (a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variations complet.
   (b) Montrer rigoureusement que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α, et que $\alpha > 1$.
   (c) En déduire, en fonction de la valeur de x, le signe de $h(x)$.
3. Justifier que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et préciser les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
5. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations complet.
6. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite (D) d'équation $y = x$ (on pourra exploiter des résultats obtenus dans les premières questions de l'exercice).
7. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
8. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$, en faisant apparaitre tous les éléments étudiés dans les questions précédentes.
9. Déterminer une primitive de la fonction f (on doit normalement reconnaitre une forme particulière permettant de calculer directement cette primitive), en déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.
10. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^n (f(t) - 1)\ dt$, calculer u_n en fonction de n, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.
11. Donner une interprétation graphique du nombre $u_n - u_1$, puis interpréter géométriquement la limite de cette valeur quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Effectuer une étude la plus complète possible de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}$. Plus il y a d'éléments apportés sur la courbe qui conclura bien entendu votre étude, mieux ce sera !