Devoir Surveillé n^o 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

18 septembre 2021

Exercice 1

1. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$
2. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f(x)f(y) \geqslant 0$
3. $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
5. réciproque : (n n'est pas un entier premier) $\Rightarrow$ ($\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n$)
   contraposée : (n est un entier premier) $\Rightarrow$ ($\forall p \in \mathbb{N}, p^2 \neq n$)

Il suffit de trouver un entier qui n'est ni premier, ni un carré parfait pour obtenir un contre-exemple. On a l'embarras du choix, le plus petit exemple étant $n = 6$ ($\sqrt{6}$ n'est pas un nombre entier, et 6 n'est pas non plus premier).

Exercice 2

1. Le seul cas où $P \uparrow Q$ est fausse est celui où $P \wedge Q$ est vraie, c'est-à-dire quand P et Q sont vraies toutes les deux :

P	Q	$P \uparrow Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2. Le plus simple ici est de faire une table de vérité pour chacune des deux propositions pour pouvoir les comparer, en se rappelant que le « non et » est faux seulement quand ses deux composants sont vrais.

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$Q \uparrow R$	$P \uparrow (Q \uparrow R)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

   Les deux colonnes qui nous intéressent ne sont pas du tout identique, le connecteur $\uparrow$ n'est donc pas « associatif ».

3. Il suffit en fait de constater que $P = P \wedge P$, donc $\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$.
4. Commençons par le plus simple : par définition $P \wedge Q = \neg(P \uparrow Q)$, donc en exploitant la question précédente $P \wedge Q = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$ (les courageux vérifieront que ça marche à coups de tables de vérité).
   Pour le « ou », on a intérêt à utiliser les lois de Morgan : $P \vee Q = \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) = \neg((P \uparrow P) \wedge (Q \uparrow Q)) = \neg(((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) = (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)))$. C'est complètement atroce mais ça répond à la question. On peut en fait trouver une expression plus simple si on le souhaite vraiment.

5. L'implication est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse. On peut donc dire qu'elle est équivalente à $\neg(P \wedge (\neg Q))$ (là encore, une table de vérité convaincra les plus dubitatifs). On peut donc écrire $P \Rightarrow Q = \neg((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) = ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)))$.
Pour l'équivalence, il ne reste plus qu'à faire un « et » avec l'implication réciproque : $P \Leftrightarrow Q = (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P)))) \uparrow (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))))$. Là encore, on peut (heureusement) faire beaucoup plus rapide...

Exercice 3

1. Les fonctions f_n sont toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme $f_0(x) = e^{-x^2}$, on calcule, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = -2xe^{-x^2}$, qui est simplement du signe de $-x$. La fonction admet donc un maximum en 0 de valeur $f_0(0) = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ (aucune difficulté), ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_0	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On peut même remarquer que la fonction f_0 est paire, voire qu'il s'agit de la célèbre « courbe en cloche » de Gauss si utile dans le domaine des probabilités.

2. Comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule donc $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Les limites données dans l'énoncé nous permettent par ailleurs d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire pour ne pas avoir à calculer les autres valeurs) :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair (puisque dans ce cas x^{x-1} est une puissance paire de x qui est toujours positive), et pour $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$ (la valeur de l'autre côté sera égale ou opposée selon la parité de n. Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont toujours nulles (c'est donné par l'énoncé pour $+\infty$, et on peut invoquer la parité des fonctions pour $-\infty$). On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

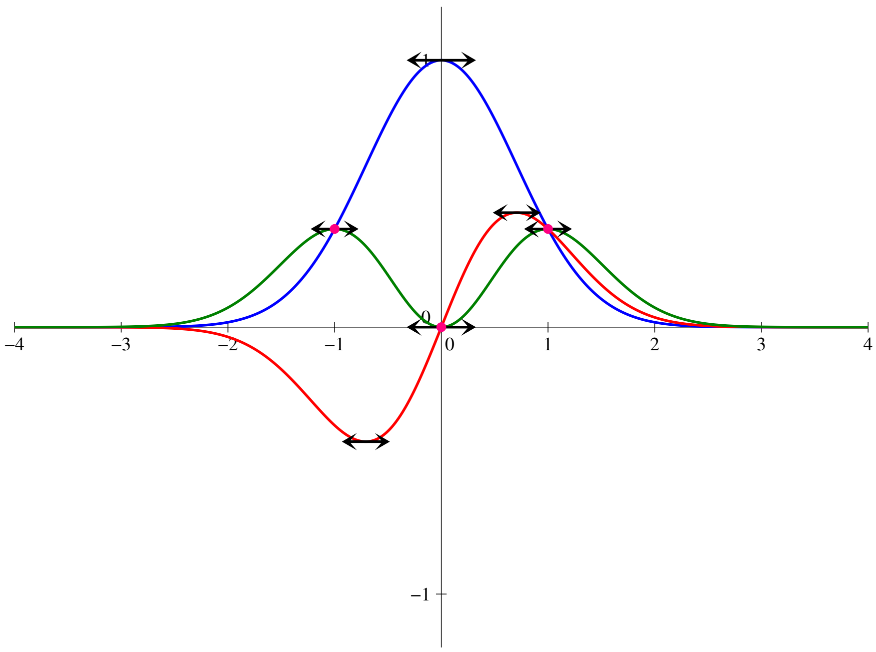
Et si n est pair :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

Dans le cas particulier de $f_2(x) = x^2 e^{-x^2}$, la dérivée s'annule en 0 et en ± 1. On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4. Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n e^{-x^2} - x^{n+1} e^{-x^2} = x^n(1-x)e^{-x^2}$. La courbe $\mathcal{C}_n$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et en-dessous sur $[1, +\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$, ainsi qu'à l'origine du repère, sauf pour le cas particulier de $\mathcal{C}_0$. Sur $\mathbb{R}^-$, $\mathcal{C}_n$ est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n(1-x^2)e^{-x^2}$. Si n est pair, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $[-1, 1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0, 1]$ et sur $]-\infty, -1]$ et en-dessous le reste du temps. Les courbes « paires » se coupent donc au point de coordonnées $\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$ et les courbes « impaires » au point de coordonnées $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$.
5. Voici les allures, avec $\mathcal{C}_0$ en bleu, $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en vert, et les points d'intersection en rose. Pour le placement des points importants, on doit être capable de calculer $\dfrac{1}{e} \simeq 0.4$ pour avoir l'ordonnée du point d'intersection des courbes, et celle des maxima de f_2. Le maximum de f_1 est nettement plus pénible, il est atteint pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$ et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2e}} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{5.4}} \simeq \dfrac{1}{2.5} \simeq 0.4$. Il est en fait très légèrement au-dessus de l'ordonnée $\dfrac{1}{e}$ (l'étude des positions relatives assure qu'il est nécessairement au-dessus).



Exercice 4

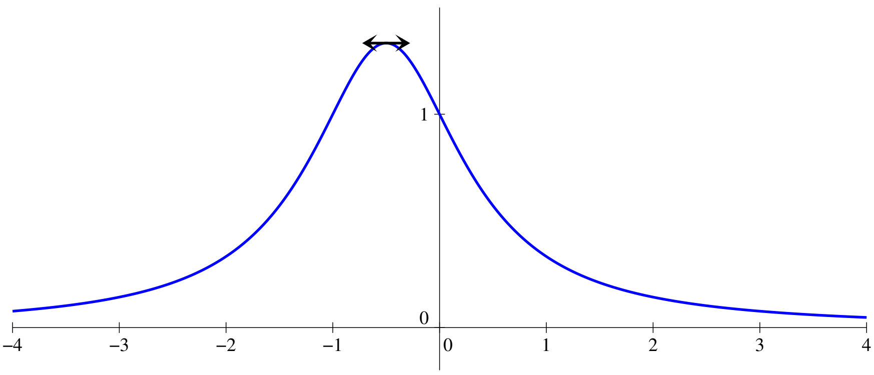
1. Le trinôme $1 + x + x^2$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Toutes les fonctions manipulées dans cet exercice sont des fonctions rationnelles dérivable sur tout leur ensemble de définition. On calcule d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, puis en dérivant f' comme un produit, $f''(x) = -\dfrac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \dfrac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$ $= \dfrac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$.
3. La dérivée seconde f'' est du signe de $x(x+1)$ (le dénominateur est toujours du signe de x^2+x+1, donc positif), donc négative uniquement entre -1 et 0. Les seules limites à calculer sont celles en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont toutes les deux nulles, pour f' comme pour f, car on un quotient de polynômes dont le dénominateur est de degré strictement plus grand que le numérateur. Reste à calculer $f'(0) = -1$ et $f'(-1) = 1$ pour compléter le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	0

La dérivée f' est du signe de $-(2x+1)$ et s'annule en particulier pour $x = -\dfrac{1}{2}$. On a déjà précisé les limites de f, il ne reste plus qu'à calculer l'ordonnée du maximum $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

4. On se contentera d'indiquer la tangente horizontale au maximum sur la courbe, mais le calcul de f'' permet en fait d'être plus précis : la courbe représentative de f est convexe sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[0, +\infty[$ et concave sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qu'on peut bien sûr essayer de respecter lors du tracé de l'allure de courbe.



5. Par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$, si $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} = \dfrac{9}{13} < 1$, on obtient bien $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

6. La dérivée f' est strictement croissante et négative sur l'intervalle I, la valeur maximale atteinte par $|g'|$ sur cet intervalle est donc $\left|g'\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$. On peut en déduire que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant C$, avec $C = \frac{135}{169} \in]0,1[$.
7. La fonction $z : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Le discriminant de cette dérivée est $\Delta = 4 - 12 < 0$, donc z' est toujours positive et z strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} z(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x) = +\infty$, la fonction z est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $z(x) = 0$ admet une unique solution. Or, $z(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + x + x) = 1 \Leftrightarrow x = f(x)$, ce qui prouve que cette unique solution est également l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. En posant $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est continue et vérifie $g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{9}{13} - \frac{1}{3} = \frac{14}{39} > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que la fonction g s'annule (au moins) une fois dans l'intervalle I. Comme on sait déjà que g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ tout entier, la valeur d'annulation l de la fonction g appartient nécessairement à l'intervalle I.
8. (a) C'est une récurrence très facile : $u_0 \in I$ par définition, et $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I$ d'après la question 5. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, cela prouve l'hérédité, et la propriété « $u_n \in I$ » est donc vérifiée pour tout entier naturel n.
   (b) Puisqu'on sait que $l \in I$ et $u_n \in I$, il suffit d'appliquer l'inégalité donnée dans la question 6 à $x = l$ (qui vérifie bien $f(x) = f(l) = l$) et à $y = u_n$, pour lequel $f(y) = f(u_n) = u_{n+1}$. On trouve immédiatement l'inégalité souhaitée.
   (c) C'est une récurrence tout à fait classique exploitant les questions précédentes : puisque $l \in I$, $|u_0 - l| = |1 - l| \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui prouve largement l'initialisation au rang 0 (on doit prouver que $|u_0 - l| \leqslant C^0 = 1$). Ensuite, si on suppose $|u_n - l| \leqslant C^n$, on en déduira $|u_{n+1} - l| \leqslant C|u_n - l| \leqslant C \times C^n = C^{n+1}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédent et l'hypothèse de récurrence. Ceci achève de prouver l'hérédité.
   (d) On sait que $0 \leqslant |u_n - l| \leqslant C^n$, avec $\lim_{n\to+\infty} C^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1). D'après le théorème des gendarmes, on aura donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
   (e) Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l, il faut trouver un réel x tel que $|x - u_n| \leqslant 10^{-3}$. Les questions précédentes prouvent que ce sera le cas du réel u_n si $C^n \leqslant 10^{-3}$ (et même probablement avant car on a une simple majoration et non une égalité). Cette dernière condition est vérifiée si $n\ln(C) \leqslant -3\ln(10)$, soit $n \geqslant \frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}$ (attention au changement de sens des inégalités, comme $C \in]0,1[$, $\ln(C) < 0$). Si on avait une calculatrice sous la main, on pourrait calculer la valeur de $n_0 = \mathrm{Ent}\left(\frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}\right) + 1$ (l'ajout d'une unité assure que le nombre entier obtenu est supérieur à la borne souhaitée), puis la valeur de u_{n_0} qui fournira la valeur approchée demandée.

Exercice 5

A. Une minoration par une fonction rationnelle.

1. La fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ (intervalle de définition de f) comme somme de fonctions usuelles dérivables, et $\forall x > -1$, $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(x+2)^2}$. Le numérateur se simplifie merveilleusement bien : $(x+2)^2 - 4(1+x) = x^2 + 4x + 4 - 4 - 4x = x^2$, on obtient finalement $h'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$.
2. L'expression obtenue est manifestement positive sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction h y est donc croissante. De plus, $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ (pas de difficulté ici, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$ en utilisant le quotient des termes de plus haut degré). On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Les variations de h et la valeur calculée pour $h(0)$ prouvent que h reste positive sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$, ce qui signifie bien que, $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant g(x)$. La fonction g minore donc f sur $[0, +\infty[$.
4. On sait déjà que $f(0) = g(0) = 0$. Calculons maintenant les valeurs des dérivées en 0. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$ (cf calcul de la dérivée de h), on constate que $f'(0) = g'(0) = 1$. Les deux courbes auront donc une tangente commune d'équation $y = x$ en 0.

B. Une famille de fonctions majorantes.

1. La fonction f_1 est certainement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, $\forall x \geqslant 0$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$. Cette dérivée étant négative sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_1 y sera décroissante. On calcule facilement $f_1(0) = 0$, mais la limite en $+\infty$ est plus problématique : $f_1(x) = x\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$, et il faut connaitre le résultat de croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ pour pouvoir conclure que $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$.
2. Les calculs de la question précédente montrent que f_1 est négative sur $\mathbb{R}$, donc que, $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Bien entendu, si cette majoration est vrai, on aura a fortiori $\ln(1+x) \leqslant kx$ pour tout réel $k \geqslant 1$ puisque $x \leqslant kx$ lorsque x est positif. Toutes les fonctions $x \mapsto kx$ avec $k \geqslant 1$ sont donc minorée par f.
3. Le calcul de dérivée est pratiquement le même que précédemment : $f_k'(x) = \dfrac{1}{1+x} - k = \dfrac{1-k-kx}{1+x}$. Cette dérivée s'annule effectivement lorsque $kx = 1-k$, donc pour $x = \dfrac{1-k}{k}$, qui est bien une valeur positive lorsque $k \in]0, 1[$.
4. Le coefficient directeur du numérateur de f_k' étant négatif, la dérivée sera positive sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1-k}{k}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\dfrac{1-k}{k}, +\infty\right[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0		$\frac{1-k}{k}$		$+\infty$
f_k	0	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-\infty$

La limite en $+\infty$ reste égale à $-\infty$, mais comme le demandait l'énoncé, on ne la détaillera pas.

5. Inutile de chercher à calculer la valeur précise du maximum m, le fait que $f_k(0) = 0$ et la croissante de f_k sur $\left[0, \dfrac{1-k}{k}\right]$ suffisent à affirmer que $m > 0$.
6. Les calculs précédents prouvent que f_k ne garde pas un signe négatif sur $\mathbb{R}^+$ quand $k \in]0, 1[$, et donc que $x \mapsto kx$ ne majore pas f dans ce cas. C'est bien sûr encore moins le cas si $k \leqslant 0$ puisque la fonction f_k est alors positive sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. En conclusion, f minore $x \mapsto kx$ si et seulement si $k \geqslant 1$.