Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

18 septembre 2021

Exercice 1

Énoncer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Tout nombre entier est un nombre réel.
2. La fonction f est de signe constant sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. La suite (u_n) est périodique (la période n'étant pas fixée).
4. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. La réciproque et la contraposée (en précisant bien laquelle est laquelle...) de la proposition : $(\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n) \Rightarrow (n \text{ n'est pas un entier premier})$

Donner un contre-exemple montrant que la réciproque énoncée à la question 5 est fausse.

Exercice 2

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique « non et », symbolisé par la notation $P \uparrow Q$, par $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$. Autrement dit, la proposition $P \uparrow Q$ est vraie si et seulement si $P \wedge Q$ est fausse (comme son nom l'indique).

1. Écrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.
2. Si P, Q et R sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalente à $P \uparrow (Q \uparrow R)$?
3. Montrer qu'on peut exprimer $\neg P$ uniquement à l'aide de P et du symbole $\uparrow$.
4. Exprimer $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ uniquement en fonction de P, Q, et $\uparrow$.
5. Exprimer l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ uniquement à l'aide de P, Q et $\uparrow$.

Exercice 3

On considère dans cet exercice la famille de fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On pourra utiliser dans cet exercice le résultat classique de croissance comparée suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{x^2}} = 0$.

1. Étudier complètement la fonction f_0 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
2. Étudier complètement la fonction f_1 (variations, limites, pas de courbe pour l'instant).
3. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n (le paramètre n étant un entier naturel), et étudier son signe (on pourra distinguer des cas selon les valeurs prises par n). On dressera en particulier le tableau de variations de la fonction f_2.
4. En notant $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n, étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celles de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+2}$. On précisera en particulier les points communs à ces courbes.
5. Tracer dans un **même** repère une allure cohérente des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 4

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''. On donnera l'expression la plus factorisée possible de $f''(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f' sur son ensemble de définition, puis celui de f (on précisera les limites utiles).
4. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.
5. Montrer que l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$ est stable par la fonction f, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$.
6. Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant C$. On **admet** que cette inégalité implique la suivante : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant C|y-x|$.
7. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution réelle (sans chercher à la résoudre), et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet également une seule solution qu'on notera l. Vérifier enfin que $l \in I$.
8. On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (réutiliser les questions précédentes est vivement conseilllé).
   (b) Montrer que l'inégalité $|u_{n+1} - l| \leqslant C \times |u_n - l|$ est vérifiée pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que $|u_n - l| \leqslant C^n$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
   (e) Donner une méthode précise permettant de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du réel l (aucune application numérique n'est demandée).

Exercice 5

On donne pour cet exercice la définition suivante : une fonction f est **minorée** par une fonction g sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$. Dans tout l'exercice, on posera $f(x) = \ln(1+x)$ et on va étudier certaines fonctions minorant f, ou minorées par f, sur $[0, +\infty[$.

A. Une minoration par une fonction rationnelle.

On pose $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ et on veut montrer que g minore f sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on va étudier la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Calculer la dérivée h' de la fonction h.
2. Faire le tableau de variations complet (limites incluses) de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. En déduire que la fonction f est minorée par g sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que les courbes représentatives des fonctions f et g admettent une tangente commune pour $x = 0$.

B. Une famille de fonctions majorantes.

Pour tout réel k, on définit une fonction f_k par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier les variations et les limites de $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction identité $x \mapsto x$ est minorée par f sur $[0, +\infty[$, et en déduire plus généralement que $\forall k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto kx$ est minorée par f.
3. On suppose désormais $k \in]0,1[$, montrer que la dérivée de f_k s'annule alors pour $x = \dfrac{1-k}{k}$.
4. En déduire les variations de f_k (toujours quand $k \in]0,1[$). On ne demande pas les limites de la fonction f_k.
5. Montrer que f_k admet un maximum sur $[0, +\infty[$. Quel est son signe ?
6. En déduire les valeurs de k pour lesquelles $x \mapsto kx$ est minorée par f.