Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

10 février 2022

Problème

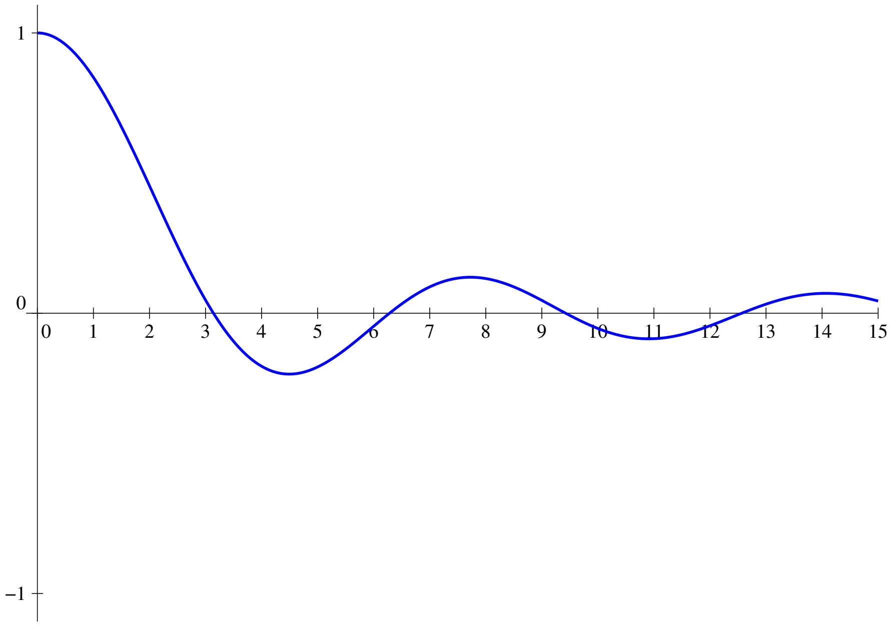
I. Étude de la fonction f.

1. On sait (taux d'accroissement de la fonction sinus) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, ce qui permet de prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$. Pour prouver que la fonction ainsi prolongée reste dérivable en 0 (elle l'est bien sûr sur $]0, +\infty[$ par théorèmes généraux), il faut calculer la limite du taux d'accroissement $\tau_{0,f}(h) = \dfrac{\frac{\sin(h)}{h} - 1}{h} = \dfrac{\sin(h) - h}{h^2}$. On utilise le développement limité donné dans l'énoncé pour écrire $\tau_{0,f}(h) = \dfrac{-\frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)}{h^2} = -\dfrac{h}{6} + h\varepsilon(h)$, quantité qui a manifestement une limite nulle quand h tend vers 0. La fonction f est donc bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (tangente horizontale à la courbe représentative de f).
2. Notons donc g la fonction définie par $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, de dérivée $g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$. Sur l'intervalle étudié, $x \geqslant 0$ et $\sin(x)$ est de signe constant (positif si n est pair, négatif si n est impair), donc la fonction g est strictement monotone sur l'intervalle. Or, $g(n\pi) = n\pi\cos(n\pi) - \sin(n\pi) = (-1)^n n\pi$ (le signe de $\cos(n\pi)$ dépend aussi de la parité de l'entier n) et $g((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}(n+1)\pi$ (même calcul). La fonction g est donc bijective de $[n\pi, (n+1)\pi]$ vers $[-(n+1)\pi, n\pi]$ ou vers $[-n\pi, (n+1)\pi]$. Dans les deux cas, elle change de signe sur l'intervalle et l'équation $g(x) = 0$ y admet donc une unique solution.
3. $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. Cette dérivée a le même signe que la fonction g étudiée à la question précédente. Si $n = 0$, la fonction g est décroissante, mais reste toujours négative (puisque $g(0) = 0$) donc f est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. Sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, on a déjà prouvé que la dérivée f' s'annulait uniquement pour $x = x_n$, la fonction f est donc croissante sur $[n\pi, x_n]$ puis décroissante sur $[x_n, (n+1)\pi]$ lorsque n est pair (et non nul), et c'est le contraire lorsque n est impair.
4. D'après ce qui précède, la dérivée f' s'annule trois fois (quatre en comptant 0) sur l'intervalle $[0, 4\pi]$, en $x_1 \in [\pi, 2\pi]$, en $x_2 \in [2\pi, 3\pi]$ et en $x_3 \in [3\pi, 4\pi]$ et a les variations suivantes :

x	0		π		x_1		2π		x_2		3π		x_3		4π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	0

Par définition, $\sin(x_n) = x_n\cos(x_n)$, ce qui prouve que $f(x_n) = \cos(x_n) \in [-1, 1]$. Cette information donne d'ailleurs de vagues précisions sur les intervalles auxquels appartiennent les valeurs x_n (en observant simplement le signe du cosinus) : $x_1 \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $x_2 \in \left[2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$ et

$x_3 \in \left[3\pi, \dfrac{7\pi}{2}\right]$. On peut par ailleurs deviner que les extrema de la fonction f vont être de plus en plus proche de 0 (on multiplie la fonction sinus par la fonction inverse qui décroît et tend vers 0 en $+\infty$, l'amplitude des pseudos-sinusoïdes va donc diminuer). Une allure de courbe :



II. Étude d'une primitive de f.

1. La fonction f (prolongée) étant continue sur $[0, +\infty[$, elle y admet des primitives, et en particulier une primitive s'annulant en 0 qui est exactement la fonction F.
2. La fonction f étant de signe constant sur chaque intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, on en déduit facilement que $u_n > 0$ si n est pair et $u_n < 0$ si n est impair.
3. Puisque la fonction à intégrer est de signe constant, $|u_n|$ correspond simplement à l'intégrale de $|f|$ sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$. On peut écrire $|u_{n+1}| = \displaystyle\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t+\pi)|}{t+\pi}\, dt$ (si on veut être extrêmement rigoureux, on a effectué dans l'intégrale le changement de variable $u = t + \pi$ qui ne modifie pas l'élément différentiel). Comme $|sin(t+\pi)| = |\sin(t)|$, on peut alors écrire $|u_n| - |u_{n+1}| = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| \times \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\pi}\right) dt$, ce qui est positif puisque $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+\pi} > 0$ pour tout réel strictement positif t. On en déduit que $|u_n| > |u_{n+1}|$, et donc que la suite $(|u_n|)$ est strictement décroissante. De plus, on peut majorer, sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, l'expression $\dfrac{|\sin(t)|}{t}$ par $\dfrac{1}{t}$, et donc $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t}\, dt = \ln((n+1)\pi) - \ln(n\pi) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Comme $|u_n| \geqslant 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$, et donc que la suite (u_n) elle-même converge vers 0.
4. Elles sont adjacentes : $F((2n+2)\pi) - F(2n\pi) = u_{2n+1} + u_{2n} = |u_{2n}| - |u_{2n+1}| > 0$ d'après les deux questions précédentes, donc la suite $(F(2n\pi))$ est croissante. De même, $F((2n+3)\pi) - F((2n+1)\pi) = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| < 0$, donc la suite est décroissante. De plus, $F((2n+1)\pi) - F(2n\pi) = u_{2n}$, qui tend vers 0 toujours d'après la question précédente.

5. La suite définie par $v_n = F(2n\pi)$ a ses deux sous-suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) qui convergent vers une même limite (puisque ce sont des suites adjacentes), donc elle converge elle-même vers cette limite.
6. La monotonie des deux suites adjacentes étudiées plus haut prouve que $F(2n\pi) \leqslant l \leqslant F((2n+1)\pi)$ pour tout entier naturel n. En particulier, $F(0) \leqslant l \leqslant F(\pi)$, avec $F(0) = 0$ et $F(\pi) = \int_0^\pi f(t)\ dt \leqslant \int_0^\pi 1\ dt = \pi$, puisque f est majorée par 1 sur l'intervalle $[0, \pi]$ (et même sur $[0, +\infty[$ tout entier d'ailleurs).
7. Soit $x > 0$, notons $n = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$, de façon à avoir $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$, on peut alors écrire $|F(x) - F(n\pi)| = \int_{n\pi}^x \frac{|\sin(t)|}{t}\ dt \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (calcul déjà effectué plus haut), donc $F(n\pi) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant F(x) \leqslant F(n\pi) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, ce qui suffit à prouver à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = l$..

III. Dérivées successives de la fonction f.

1. Dérivons donc une deuxième fois : $f''(x) = \frac{-x^3\sin(x) - 2x(x\cos(x) - \sin(x))}{x^4}$ $= \frac{2\sin(x) - 2x\cos(x) - x^2\sin(x)}{x^3}$.
2. Rappelons déjà que $\sin^{(0)}(x) = \sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, $\sin''(x) = -\sin(x)$ et $\sin'''(x) = -\cos(x)$. On en déduit que $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, puis $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$, et enfin $P_2 = X^2 - 2$ et $Q_2 = 2X$ (en faisant attention aux signes). Il semblerait bien qu'on ait $Q_n = P_n'$.
3. La récurrence a déjà été triplement initialement lors de la question précédente. Supposons donc que, pour un certain entier n, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$, alors en dérivant ce quotient, $f^{(n+1)}(x)$
$= \frac{x^{n+1}(P_n'(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n'(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}(x))}{x^{n+2}}$
$\frac{-(n+1)x^n(P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x))}{}$. En simplifiant tout par x^n et en utilisant le fait que $\sin^{(n+2)}(x) = -\sin^{(n)}(x)$, on peut obtenir la forme $f^{(n+1)}(x)$
$= \frac{(xQ_n(x) - xP_n'(x) + (n+1)P_n(x))\sin^{(n+2)}(x) + (xP_n(x) + xQ_n'(x) - (n+1)Q_n(x))\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}}$,
ce qui est de la forme souhaitée en posant $P_{n+1} = XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = XQ_n - XP_n' + (n+1)P_n$. Ce calcul prouve l'hérédité et achève donc notre récurrence.
4. On prouve par une récurrence immédiate (et simultanée) que P_n et Q_n sont à coefficient entiers : c'est le cas de P_0 et Q_0, et en supposant que P_n et Q_n sont à coefficients entiers, alors $Q'n$ et P_n' le sont également donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi vu les formules obtenues à la question précédente.

   Il semblerait au vu des premières valeurs calculées que P_n soit de degré n et Q_n de degré $n-1$ (pour $n \geqslant 1$), et que P_n ait pour coefficient dominant 1 et Q_n pour coefficiant dominant n. Prouvons-le à nouveau par récurrence. L'initialisation a déjà été faite, supposons donc les relations vérifiées au rang n. Les polynômes XP_n, XQ_n' et $(n+1)Q_n$ sont alors de degrés respectifs $n+1$, $n-1$ et $n-1$, ce qui prouve que P_{n+1} est nécessairement de degré $n+1$. De plus, son coefficient dominant est celui de XP_n, donc le même que celui de P_n qui a été supposé égal à 1. Concernant Q_{n+1}, on a un tout petit peu plus de travail : XQ_n a pour terme dominant nX^n, XP_n' a pour terme dominant $X \times (nX^{n-1}) = nX^n$ qui va donc s'annuler avec le précédent quand on va faire la différence des deux polynômes ; et $(n+1)P_n$ a pour terme dominant $(n+1)X^n$. Finalement, Q_{n+1} aura donc un terme dominant égal à $(n+1)X^n$, ce qui prouve bien l'hérédité de notre récurrence.

Enfin, une dernière récurrence permet de prouver que P_n a la même parité que n et Q_n la parité opposée. C'est vrai pour les premiers polynômes calculés, et en le supposant vrai au rang n, alors XP_n, Q_n et XQ'_n ont tous les trois une parité opposée à celle de P_n (le produit par X change la parité, la dérivation également, et Q_n est par hypothèse de récurrence de parité opposée à P_n), donc P_{n+1} est de parité opposée à P_n. De même, Q_n est de parité opposée à Q_n.

5. On calcule donc $P_3 = XP_2 + XQ'_2 - 3Q_2 = X^3 - 2X + 2X - 6X = X^3 - 6X$ et $Q_3 = XQ_2 - XP'_2 + 3P_2 = 2X^2 - 2X^2 + 3X^2 - 6 = 3X^2 - 6$.
6. Supposons la relation $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x)$ vérifiée pour tout réel, alors en particulier $U(n\pi)\cos(n\pi) + V(n\pi)\sin(n\pi) = 0$, ce qui implique que, pour tout entier naturel n, $U(n\pi) = 0$. Le polynôme U admet donc une grosse infinité de racines, il est nécessairement nul. On a alors $V(x)\sin(x) = 0$, ce qui implique également que V s'annule énormément (pour tous les réels pour lesquels $\sin(x) \neq 0$), et donc que $V = 0$.
7. Toutes les fonction impliquées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz (au rang $n+1$ pour avoir plus rapidement les relations souhaitées) pour obtenir $\sin^{(n+1)}(x) = (\mathrm{id} \times f)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{id}^{(k)}(x) f^{(n+1-k)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)$. Autrement dit, en multipliant tout par x^{n+1}, $x^{n+1}\sin^{(n+1)}(x) = (P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x))\sin^{(n+1)}(x) + ((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x))\sin^{(n)}(x)$. La question précédente montre qu'on peut alors affirmer que les coefficients devant $\sin^{(n)}$ et $\sin^{(n+1)}$ sont nuls (au signe près, l'un des deux est égal à sin et l'autre à cos). On en déduit que $P_{n+1} + (n+1)Q_n = X^{n+1}$ et $(n+1)P_n - Q_{n+1} = 0$.
8. En identifiant ces formules avec celles déjà obtenues pour P_{n+1} et Q_{n+1}, on obtient d'une part à l'aide de la deuxième équation $(n+1)P_n - XQ_n + XP'_n - (n+1)P_n = 0$ donc $Q_n = P'_n$, et d'autre part à l'aide de la première formule $XP_n + XQ'_n - (n+1)Q_n + (n+1)Q_n = X^{n+1}$, donc $XP_n + XP''_n = X^{n+1}$ et $P_n + P''_n = X^n$.
9. La forme générale demandée découle immédiatement de la parité du polynôme P_n donnée plus haut dans l'exercice (un terme sur deux s'annule à partir de X^n). De plus, si $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$, alors $P''_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k(n-2k)(n-2k-1)X^{n-2k-2}$, et la relation $P_n + P''_n = X^n$ implique les égalités suivantes par identification des coefficients : $a_0 = 1$, puis $a_1 + n(n-1)a_2 = 0$, donc $a_2 = -n(n-1)$, puis $a_2 + (n-2)(n-3)a_1 = 0$, donc $a_2 = n(n-1)(n-2)(n-3) = \dfrac{n!}{(n-4)!}$. On démontre alors facilement (par récurrence) que $a_k = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-2k)!}$, donc $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} X^{n-2k}$.
10. On a vu plus haut que le polynôme P_n était une solution particulière de cette équation linéaire du second ordre à coefficients constants. Or, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (c'est du cours !), donc les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + P_n(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.