Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 10 février 2022

Ce devoir est plus que fortement inspiré d'un vieux sujet d'un concours aujourd'hui disparu, mais qui était à l'époque destiné à être passé par des élèves en fin de **première** année de prépa (oui, vous pourrez retrouver facilement le sujet d'origine, et même des corrigés détaillés, mais comme vous avez tous conscience que recopier un tel corrigé n'aurait strictement aucun intérêt, vous ne le ferez bien entendu pas). Il constitue une bonne base de révisions de tout ce qu'on a vu en analyse depuis le début d'année. Pour votre information, le problème entier posé ici constituait la moitié d'une épreuve de quatre heures au concours en question.

Problème

On définit une fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Le but du problème est d'étudier plusieurs fonctions et suites liées à la fonction f.

I. Étude de la fonction f.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 (on continuera à noter f le prolongement obtenu) et de classe D^1 sur $[0,+\infty[$ une fois prolongée (on pourra utiliser le développement limité suivant de la fonction sinus : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$).
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel, montrer que l'équation $x\cos(x) = \sin(x)$ admet une unique solution sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, que l'on notera x_n si on a besoin de l'exploiter à nouveau dans les calculs des questions suivantes.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,\pi]$, puis sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ (on distinguera deux cas suivant la parité de l'entier n).
4. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f sur $[0,4\pi]$.

II. Étude d'une primitive de f.

1. Justifier l'existence de la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.
2. On note $u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\ dt$. Quel est le signe de u_n ?
3. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
4. Que peut-on dire des suites $(F(2n\pi))$ et $(F((2n+1)\pi))$?
5. Montrer que la suite $(F(n\pi))$ converge vers une limite l qu'on ne cherchera surtout pas à calculer (pour les curieux, on peut prouver que $l = \dfrac{\pi}{2}$).
6. Montrer que $0 \leqslant l \leqslant \pi$.
7. Déterminer si la fonction F admet une limite en $+\infty$, et donner sa valeur le cas échéant.

III. Dérivées successives de la fonction f.

On admet que le prolongement de la fonction f obtenu dans la toute première question du problème est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. Le but de cette dernière partie est d'étudier les dérivées successives $f^{(n)}$ de la fonction f.

1. Calculer $f''(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.
2. On souhaite prouver, pour tout entier naturel n, l'existence de deux polynômes P_n et Q_n tels que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$. Donner les expressions des polynômes P_n et Q_n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Quelle reation simple semble-t-on oberver entre les polynômes P_n et Q_n ?
3. Démontrer par récurrence l'existence des polynômes P_n et Q_n. On déterminera lors de cette récurrence une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n
4. Montrer que P_n et Q_n sont des ponynômes à coefficients entiers. Précisez le dégré, la parité et le coefficient dominant de ces polynômes.
5. Calculer P_3 et Q_3 à l'aide des relations de récurrences obtenues plus haut.
6. Montrer que, si U et V sont deux polynômes vérifiant $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$, alors $U = V = 0$.
7. En appliquant la formule de Leibniz à l'égalité $xf(x) = \sin(x)$, obtenir deux nouvelles relations entre P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.
8. En déduire que $P_n' = Q_n$, et montrer que P_n est solution d'une équation différentielle très simple du second ordre.
9. En notant $p = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, justifier que $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$, avec $a_k \in \mathbb{R}$, et déterminer une expression de a_k faisant intervenir un quotient de factorielles.
10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = x^n$, où n est un entier naturel quelconque.