Devoir Maison n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

24 janvier 2021

Exercice 1 : résolution d'une équation de Pell-Fermat.

1. Supposons donc $(x,y) \in G$ et $(x',y') \in G$, alors $x^2 = 1 + 2y^2$, donc $x > \sqrt{|2y|}$, et de même $x' > \sqrt{|2y'|}$. On en déduit que $|2yy'| < xx'$, ce qui assure que $xx' + 2yy' \geqslant 0$, donc $(x,y) \star (x',y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ (le faitque les deux nombres sont entiers est évident). Reste à prouver que le couple est encore solution de l'équation de Pell-Fermat : $(xx'+2yy')^2 - 2(xy'+yx')^2 = x^2x'^2 + 4xx'yy' + 4y^2y'^2 - 2x^2y'^2 - 4xx'yy' - 2y^2x'^2 = x^2x'^2 + 4y^2y'^2 - 2(x^2y'^2 + y^2x'^2) = (x^2-2y^2)(x'^2-2y'^2) = 1 \times 1 = 1$ avec les hypothèses faites. La loi $\star$ est donc bien interne, c'est une lci sur G.
2. La loi est manifestement commutative. Pour l'associativité, pas d'autres choix que de calculer $((x,y) \star (x',y')) \star (x'',y'') = (xx' + 2yy', xy' + x'y) \star (x'',y'') = (xx'x'' + 2yy'x'' + 2xy'y'' + 2x'yy'', xx'y'' + 2yy'y'' + xy'x'' + x'yx'')$. Les deux entiers obtenus sont invariants par permutation circulaire (si on échange le rôle de x, x', x'' et de y, y', y'', on obtiendra toujours les mêmes expressions), ce qui prouve qu'on obtiendrait la même valeur pour $(x,x') \star ((x',y') \star (x'',y''))$ et donc que $\star$ est une lci associative.

   On vérifie très facilement que $(1,0)$ est un élément neutre : $(1,0) \star (x,y) = (x,y)$. Le symétrique (x',y') de l'élément (x,y) (s'il existe) devrait donc vérifier $xx' + 2yy' = 1$ et $xy' + x'y = 0$. Plutôt que de se lancer dans une résolution de système compliquée, on peut avoir un peu d'intuition : si $(x,y) \in G$, $(x,-y) \in G$ (puisque l'équation $x^2 - 2(-y)^2 = 1$ sera vérifiée). Or, $(x,-y)$ est le candidat parfait pour le symétrique de (x,y). De fait, $(x,y) \star (x,-y) = (x^2 - 2y^2, -xy + yx) = (1,0)$. Tout couple appartenant à G admet donc un symétrique pour la loi $\star$, et $(G,\star)$ est un groupe.
3. On ne peut évidemment pas avoir d'autres solutions de la forme $(1,y)$ que le couple $(1,0)$. On ne peut pas non plus avoir de solutions de la forme $(2,y)$ puisqu'aucun entier y ne vérifie $2y^2 = 2^2 - 1 = 3$ (de façon plus générale, on ne peut pas avoir de solution avec x pair car $x^2 - 2y^2$ est alors nécessairement pair). On passe donc à $x = 3$ qui impose $2y^2 = 8 - 1 = 8$, donc $y = \pm 2$. Il y a donc en fait deux solutions minimales qui sont les couples symétriques $(3,2)$ et $(3,-2)$.
   (a) C'est du calcul basique : $a^2 = (3,2) \star (3,2) = (17,12)$, puis $a^3 = (17,12) \star (3,2) = (99,70)$ et enfin $a^4 = (17,12) \star (17,12) = (577,408)$ (on pouvait aussi calculer $(99,70) \star (3,2)$ pour obtenir le dernier couple).
   (b) Il suffit d'écrire que $a^{n+1} = a^n \star a$, donc $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) \star (3,2) = (3x_n + 4y_n, 2x_n + 3y_n)$.
   (c) On procède par récurrence : au rang 0, on a bien $0 = y_0 < x_0 = 1$, et si on suppose les deux inégalités vérifiées au rang n, alors $3x_n + 4y_n$ et $2x_n + 3y_n$ sont clairement positifs, et $x_{n+1} - y_{n+1} = x_n + y_n > 0$, donc $y_{n+1} < x_{n+1}$.

   Les deux suites sont strictement croissantes : $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 4y_n > 0$ et $y_{n+1} - y_n = 2x_n + 2y_n > 0$. En tant que suites d'entiers naturels strictement croissantes, les deux suites ont une limite égale à $+\infty$.

(d) On peut écrire $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4y_{n+1} = 3x_{n+1} + 8x_n + 12y_n$. Or, en reprenant la relation $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, on en déduit que $12y_n = 3x_{n+1} - 9x_n$. On peut remplacer dans l'égalité précédente : $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$. On reconnait bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caréctaristique $x^2 - 6x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 = 32$ et les racines sont réelles : $r_1 = \dfrac{6+\sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$, et $r_2 = \dfrac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$. On peut donc trouver deux réels A et B tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = A(3+2\sqrt{2})^n + B(3-2\sqrt{2})^n$. On sait que $x_0 = 1$, donc $A + B = 1$, et $x_1 = 3$, donc $3 = 3A + 2\sqrt{2}A + 3B - 2\sqrt{2}B$. Comme $3A + 3B = 3$ (première équation), on en déduit immédiatement $B = A$, puis $A = \dfrac{1}{2}$, donc $x_n = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}$.

Notre paresse légendaire nous incite à ne pas refaire le même genre de calcul pour la deuxième suite (qui vérifie la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2), mais plutôt à repartir de $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ pour en déduire que $y_n = \dfrac{x_{n+1} - 3x_n}{4}$
$= \dfrac{(3+2\sqrt{2})^{n+1} + (3-2\sqrt{2})^{n+1} - 3 \times (3+2\sqrt{2})^n - 3 \times (3-2\sqrt{2})^n}{8}$
$= \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3+2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

4. (a) On a déjà vu plus haut que la suite (y_n) était strictement croissante et avait pour limite $+\infty$, donc il existe nécessairement un entier n à partir duquel $y_n > y$. Notons n_0 le plus petit entier naturel pour lequel $y < y_n$, alors par définition $y_{n_0-1} \leqslant y$, ce qui fournit l'encadrement souhaité (on ne peut pas avoir $n_0 = 0$ puisque $y_0 = 0$ ne peut pas être strictement supérieur à y si on le suppose entier naturel).

(b) La question précédente a prouvé que $y < y_{n+1}$, donc $yx_n < y_{n+1}x_n$. De plus, comme $x^2 = 1 - y^2$ et $x_{n+1}^2 = 1 - y_{n+1}^2$ (on est en présence de couples qui appartiennent tous à G par hypothèse), alors $x^2 > x_{n+1}^2$, donc $x > x_{n+1}$ et $-xy_n < -xy_{n+1}$. On peut additionner les deux inégalités obtenues pour en déduire $yx_n - xy_n < y_{n+1}x_n - x_{n+1}y_n$. Ce membre de droite vaut par ailleurs, en reprenant les relations de récurrence de la question 3.b, $(2x_n + 3y_n)x_n - (3x_n + 4y_n)y_n = 2x_n^2 - 4y_n^2 = 2(x_n^2 - 2y_n^2) = 2$.

Enfin, l'inégalité supposée $y_n \leqslant y$ implique $x \leqslant x_n$ (même principe que ci-dessus), donc $xy_n \leqslant yx_n$ et $yx_n - xy_n \geqslant 0$.

(c) Par définition, a^{-n} est le symétrique de a^n, donc $a^{-n} = (x_n, -y_n)$. On a donc $a^{-n} \star (x, y) = (x_n x - 2y_n y, x_n y - xy_n)$. La deuxième valeur de ce couple est d'après la question précédente égale à 0 ou 1. Mais comme il s'agit d'un élément de G, on ne peut pas avoir un deuxième entier égal à 1 (l'équation $x^2 - 2 = 1$ n'a pas de solution entière) donc la seule possibilité avec $x \in \mathbb{N}$ est d'avoir $b \star a^{-n} = (1, 0)$. Comme on est dans un groupe, on peut composer à droite par a^n pour en déduire que $b = a^n$ (ou alors on invoque l'unicité du symétrique dans un groupe).

(d) Toutes les solutions avec $x \geqslant 0$ sont donc de la forme a^n ou a^{-n}, auxquelles il faut simplement ajouter les couples obtenues en prenant des valeurs de x négatives, opposées aux valeurs positives déjà citées.

Exercice 2 : une équation matricielle.

1. Cela découle des propriétés calculatoires de la transposition : $(A\top A)\top = A^\top(A^\top)^\top = A^\top A$, donc $A^\top A$ est bien une matrice symétrique.
2. Par définition, $AA^{-1} = I_n$. En prenant la transposée de cette égalité, comme I_n est une matrice symétrique, on obtient $(A^{-1})^\top A^\top = I_n$. Or, par hypothèse, $A^\top = A$, ce qui prouve

que $(A^{-1})^\top$ est inverse de la matrice A, et donc égale à A^{-1} (unicité de l'inverse d'une matrice). La matrice A^{-1} est donc symétrique.

3. En notant $B = A^\top A$, on calcule $B_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$. Il ne reste plus qu'à sommer ces sommes : $\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$. Autrement dit, on calcule simplement la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice A.

   Si A est symétrique, $\mathrm{Tr}(A^2)$ correspond au calcul précédent, qui donne un résultats positif comme somme de carrés de nombres réels. De plus, si $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, tous les nombres a_{ki}^2 sont nuls, ce qui n'est en effet le cas que pour la matrice nulle.

4. Calculons donc $A(B - C)A = ABA - ACA = I_n A - AI_n = A - A = 0$. Si on multiplie cette égalité à gauche par C puis à droite par B, on en déduit $(B - C)A = 0$ puis $B - C = 0$, ce qui prouve que $B = C$. La matrice A est donc inversible, d'inverse B.

5. Si M est solution de l'équation (E), elle vérifie les hypothèses de la question précédente en posant $B = M^\top M$ et $C = MM^\top$, donc elle est inversible. De plus, son inverse est égal à $M^\top M$ qui est une matrice symétrique d'après la question 1. M est donc l'inverse d'une matrice symétrique, donc symétrique d'après la question 2. On peut alors remplacer $M^\top$ par M dans l'équation (E) pour obtenir l'équation équivalente $M^3 = I_n$.

6. Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}((M - I_n)^2) = \mathrm{Tr}(M^2 - 2M + I_n) = \mathrm{Tr}(M^2) - 2\,\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(I_n) = b - 2a + n$. De même, en exploitant le fait que $M^3 = I_n$ et donc $M^4 = M$, on calcule $\mathrm{Tr}((M^2 - I_n)^2) = \mathrm{Tr}(M - 2M^2 + I_n) = a - 2b + n$, et $\mathrm{Tr}((M - M^2)^2) = \mathrm{Tr}(M^2 - 2I_n + M) = a + b - 2n$.

7. Si on additionne les trois traces calculées à la question précédente, on trouve $b - 2a + n + a - 2b + n + a + b - 2n = 0$. Or, chacune de ces traces est positive (question 3, les matrices manipulées sont toutes symétriques car M et I_n le sont). La seule possibilité est donc que chacune des trois traces soit nulle, ce qui implique, toujours d'après la question 3, que $M - I_n = M^2 - I_n = M - M^2 = 0$. Autrement dit, la seule solution de l'équation (E) est $M = I_n$.