Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 8

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 24 janvier 2021

Exercice 1 : résolution d'une équation de Pell-Fermat.

On cherche dans cet exercice à étudier les solutions entières de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Pour cela on notera $G = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$. On définit une loi de composition $\star$ sur cet ensemble par $(x, y) \star (x', y') = (xx' + 2yy', xy' + yx')$.

1. Vérifiez que $\star$ est une lci sur l'ensemble G.
2. Quelles sont les propriétés intéressantes de la loi $\star$ (associativité, commutativité, élément neutre, présence de symétriques) ? En particulier, $(G, \star)$ est-il un groupe ?
3. Montrer que la « plus petite » solution de notre équation (celle pour laquelle x est minimal, en excluant la solution triviale $(1, 0)$) est le couple $(3, 2)$. On notera désormais $a = (3, 2)$, et $a^n = \underbrace{a \star a \cdots \star a}_{n \text{ fois}}$. On notera par ailleurs x_n et y_n les deux « coordonnées » de a^n (autrement dit, $a^n = (x_n, y_n)$).
   (a) Calculer les valeurs de a^n (et donc de x_n et y_n) pour $n \in \{2, 3, 4\}$.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant y_n < x_n$. Quelles sont les monotonies et limites des suites (x_n) et (y_n) ?
   (d) Calculer explicitement les valeurs de x_n et y_n (indice : on doit pouvoir obtenir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la seule suite (x_n), les racines de l'équation caractéristique sont modérément sympathiques).
4. On considère maintenant $b = (x, y)$ un élément quelconque de G.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n pour lequel $y_n \leqslant y < y_{n+1}$ (où (y_n) désigne toujours la suite étudiée à la question précédente).
   (b) En déduire que $0 \leqslant yx_n - xy_n < y_{n+1}x_n - x_{n+1}y_n = 2$.
   (c) Montrer alors que $b \star a^{-n} = (1, 0)$. En déduire la valeur de b.
   (d) Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 2 : une équation matricielle.

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les matrices carrées $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MM^\top M = I_n$ (on notera (E) cette équation).

1. Justifier que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que, si A est une matrice symétrique et inversible, A^{-1} est également symétrique.
3. Exprimer $\mathrm{Tr}(A^\top A)$ en fonction des coefficients de la matrice A. En déduire que, si A est symétrique, $\mathrm{Tr}(A^2) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$.
4. Soit A une matrice carrée telle qu'il existe deux matrices B et C de même taille telles que $AB = CA = I_n$ (autrement dit, A admet un inverse à gauche et un inverse à droite). En calculant $A(B - C)A$, montrer que A est inversible.
5. Montrer que toute solution M de l'équation (E) est une matrice inversible, puis symétrique, et en déduire la valeur de M^3.
6. En notant $a = \mathrm{Tr}(M)$ et $b = \mathrm{Tr}(M^2)$, exprimer en fonction de a et de b les valeurs de $\mathrm{Tr}((M - I_n)^2)$, de $\mathrm{Tr}((M^2 - I_n)^2)$ et enfin de $\mathrm{Tr}((M - M^2)^2)$ (en supposant toujours M solution de (E)).
7. En déduire que la seule solution de l'équation (E) est $M = I_n$.