Devoir Maison n° 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

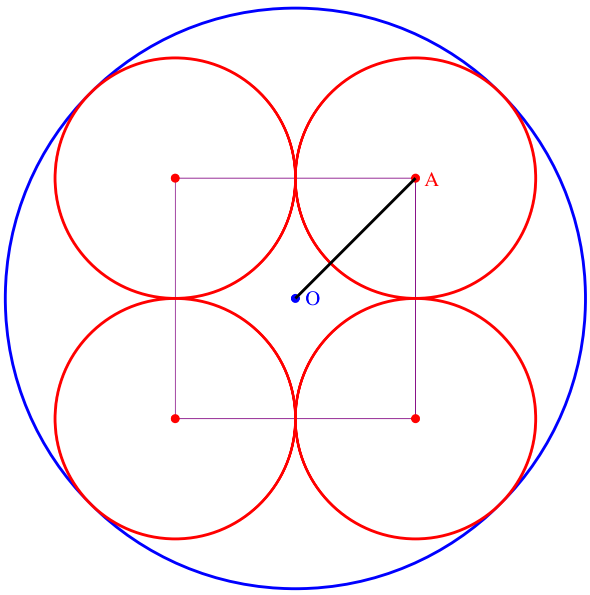
6 janvier 2021

Énigme 1 : un calendrier généreux.

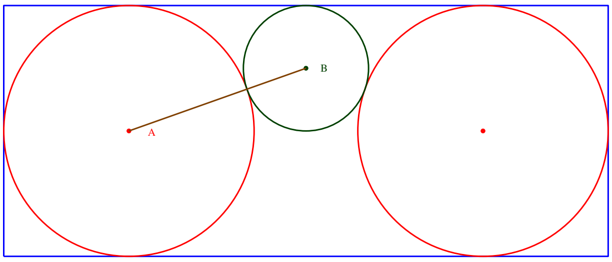
Il s'agit donc de rechercher le ppcm de tous les entiers compris entre 1 et 24. Le plus rapide pour cela est d'écrire leur décomposition en facteurs premiers (même s'il y a des formules plus rapides, cf l'exercice 17 de la feuille d'arithmétique). Allons-y : 2, 3, 2^2, 5, 2×3, 7, 2^3, 3^2, 2×5, 11, $2^2 \times 3$, 13, 2×7, 3×5, 2^4, 17, 2×3^2, 19, $2^2 \times 5$, 3×7, 2×11, 23, $2^3 \times 3$. On garde ensuite la valuation p-adique maximale pour chacun des facteurs premiers obtenus dans ces décompositions, ce qui donne un ppcm égal à $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 = 5\ 354\ 228\ 800$. Ah, ce n'est pas tout à fait assez pour nourrir la planète, il faudra attendre que le variant ζ du COVID tue quelques milliards d'humains pour que ça suffise.

Énigme 2 : les boules de Noël.

Voici ce qu'on l'on verra du-dessus, si on coupe la boîte en son milieu (au niveau de l'équateur des grandes boules, donc) :



Le grand cercle bleu a pour rayon 10 (donnée de l'énoncé, la boîte a pour diamètre 20), notons R le rayon commun des quatre grandes boules bleues (je n'ai pas représenté la petite boule au milieu pour l'instant), si on note O le centre de la boîte, on aura $OA = R\sqrt{2}$ (demi-diagonale du carré qui a pour côté $2R$), et le rayon du grand cercle vaut manifestement $OA + R$, donc $R(1 + \sqrt{2}) = 10$, ce qui donne $R = \dfrac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{2} - 1) = 10\sqrt{2} - 10$. Faisons maintenant un autre schéma en coupe verticale (toujours en passant par le centre de la boîte, et par les « pôles » de deux des quatre grandes boules), en traçant cette fois la petite boule dont on notera r le rayon :



Sur ce nouveau schéma, le rectangle a pour hauteur $2R = 20\sqrt{2} - 20$ et pour largeur 20 (diamètre de la boîte). En prenant le coin inférieur gauche du rectangle bleu comme origine du repère, le centre A de la grosse boule de gauche a pour coordonnées (R, R), et le centre B de la petite boule a pour coordonnées $(10, 2R-r)$. On en déduit que $AB^2 = (R-10)^2+(R-r)^2$. Or, on doit aussi avoir $AB = R+r$, donc r doit vérifier l'équation $(R-10)^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$, soit $R^2 - 20R + 100 + R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2$, ou encore $4Rr = R^2 - 20R + 100$, donc $r = \dfrac{(R-10)^2}{4R}$. Il ne reste plus qu'à calculer : $r = \dfrac{(10\sqrt{2}-20)^2}{40\sqrt{2}-40} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2-4\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}-1} = 5(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) = 5(\sqrt{2}-1)$. En fait, on a tout simplement $r = \dfrac{R}{2}$, donc on doit pouvoir obtenir ce résultat beaucoup plus simplement et rapidement.

Énigme 3 : L'âge du père Noël.

On cherche donc trois entiers naturels x, y et z vérifiant la condition $xyz = x^2 + y^2 + z^2$ (avec de plus $80 \leqslant x \leqslant 150$). Belle équation diophantienne qu'on peut très bien, pour ne pas trop s'embêter, faire résoudre à Python. Un exemple de programme bourrin (j'ai supposé l'âge des enfants inférieur à 50 et les deux âges différents) :

```
for x in range(80,151) :
    for y in range(2,50) :
        for z in range(y) :
            if x*y*z==x**2+y**2+z**2 :
                print(x,y,z)
```

Le programme affiche immédiatement les deux réponses possibles : 87 ans pour le père Noël, 15 ans et 6 ans pour les enfants, ou bien 102 ans pour le père Noël, 39 ans et 3 ans pour les enfants (un peu moins crédible). Il existe quelques solutions avec des âges plus petits (un père Noël de 39 ans, des enfants de 15 ans et 3 ans par exemple), mais si on autorise le père Noël à être un peu plus vieux, la solution suivante (en limitant toujours les âges des enfants à 50 ans) donne un père Noël de 582 ans (âge respectable) et des enfants de 39 ans et 15 ans. Avec des enfants « légèrement » plus vieux, on peut aussi avoir un père Noël de 507 ans et des enfants de 87 et 6 ans. On peut aussi pousser jusqu'à 1299 ans pour le père Noël, 87 et 15 ans pour les enfants. Aucune autre solution pour des enfants de moins de 100 ans, ce qui en fait quand même globalement bien peu. Bon, très bien, mais existe-t-il une méthode pour résoudre « à la main » cette équation ? Certainement, car on constate des caractéristiques étonnantes des solutions (les trois entiers sont toujours divisibles par 3, la valeur de $x - yz$ est toujours très faible). Mais je vais être honnête avec vous, je n'en ai trouvé aucune !

Énigme 4 : Probas chez les lutins.

Lorsqu'on lance sept dés à six faces distinctes, il y a 6^7 résultats possibles (on suppose que les dés sont distinguables entre eux, ce qui simplifie le calcul car les tirages sont alors tous équiprobables). Comptons ceux pour lesquels chaque face (ici chaque lutin) apparait au moins une fois. Comme on a un dé de plus que de faces, une face exactement apparaitra deux fois. Il faut donc choisir quelle face apparait deux fois (6 possibilités), choisir les deux dés qui tomberont sur cette face de $\dbinom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ façons, puis choisir l'ordre dans lequel apparaitra les cinq faces restantes sur les cinq dés restants, ce qui peut se faire de $5! = 120$ façons. Au total, il y a donc $6 \times 21 \times 120$ tirages convenables, ce qui correspond à une probabilité de $\dfrac{6\times 7\times 3\times 6\times 2\times 10}{6^7}=\dfrac{70}{6^4}=\dfrac{35}{648}\simeq 0.054$ (on, ce n'est pas beaucoup, en moyenne on aura souvent un voire deux lutins qui ne travailleront pas).

Avec six dés, c'est en fait plus simple, il y a 6^6 tirages possibles au total et 6! tirages où chaque face est tirée exactement une fois, soit une probabilité égale à $\dfrac{6!}{6^6}=\dfrac{20}{6^4}=\dfrac{5}{324}\simeq 0.015$ (c'est logiquement encore plus faible que tout à l'heure).

Avec huit dés, le nombre total de tirages vaut 6^8. Le nombre de tirages convenables est un peu plus délicat à calculer. On compte le nombre de cas où une même face apparait trois fois, et chacune des autres une seule fois, par la même méthode que tout à l'heure : 6 choix possibles pour la face apparaissant trois fois, $\dbinom{8}{3}=\dfrac{8\times 7\times 6}{3!}=56$ choix pour les trois dés correspondants, puis 5! permutations pour les cinq dés qui restent. On ajoute ensuite le nombre de cas où deux faces apparaissent deux fois (et les autres une seule) : on choisit les deux faces doubles de $\dbinom{6}{2}=15$ façons, puis les deux dés ayant donné la première face double (par exemple celle correspondant au premier lutin dans l'ordre alphabétique) de $\dbinom{8}{2}=28$ façons, puis les deux dés ayant donné la deuxième face double de $\dbinom{6}{2}=15$ façons, et enfin on répartit les autres faces de 4! façons. Globalement, notre probabilité vaut donc $\dfrac{6\times 56\times 120+15\times 28\times 15\times 24}{6^8}=\dfrac{665}{5\ 832}\simeq 0.114$. Non, ce n'est toujours pas beaucoup. Si j'avais été très méchant, je vous aurais demandé le nombre minimum de dés que le père Noël devrait lancer pour que la probabilité dépasse 50% (c'est un problème difficile, qui revient en gros à compter le nombre d'applications surjectives de $\{1,2,\dots,n\}$ vers $\{1,2,3,4,5,6\}$, chose qu'on sait faire théoriquement, mais avec une formule vraiment pas simple).

Énigme 5 : à court de carottes.

Non, la réponse n'est évidemment pas « ben il lui restera plus de carottes si les rennes bouffent 1000 carottes pour faire 1000 kilomètres ». Imaginons la procdure suivante : le père Noël prudent embarque le premier millier de carottes, fait un seul kilomètres, dépose 998 carottes (pour en garder une pour le retour) et revient chercher les carottes suivantes. De même, il en prend 1000, en dépose 998 puis revient chercher les 1000 dernières carottes. Il aura donc réussi à amener au kilomètre 1 un stock de 2995 carottes (il a fait « deux aller-retours et demi » donc consommé cinq carottes pour un seul kilomètre). En continuant ainsi, il consommera cinq carottes à chaque kilomètre tant qu'il aura un stock de plus de 2000 carottes (nécessitant deux aller-retours et demi), c'est-à-dire jusqu'au kilomètre 200. Ensuite, il pourra se contenter d'un aller-retour et demi et ne consommera donc plus que trois carottes par kilomètre, jusqu'à atteindre le seuil de 1000 carottes, après quoi il fera bien sûr le reste du trajet d'une seule traite. En résumé, et en évitant de s'arrêter tous les kilomètres :

- on prend le premier millier de carottes, on fait 200 bornes, on en pose 600 et on revient. Pareil avec le deuxième millier, puis on prend le troisième millier et on en consomme 200 carottes pour rejoindre le kilomètre 200. On a donc exactement $600+600+800=2000$ carottes au kilomètres 200.
- on reprend 1000 carottes et on les amène au kilomètre $533+\dfrac{1}{3}$ (soyons précis) où on en pose $333+\dfrac{1}{3}$ pour pouvoir revenir au kilomètre 200, on prend le deuxième millier de carottes et on arrive à en amener $666+\dfrac{2}{3}$ au kilomètre $533+\dfrac{1}{3}$, où on reconstitue donc un stock d'exactement 1000 carottes.
- il reste $467+\dfrac{2}{3}$ kilomètres à parcourir, il restera donc 533 carottes et un tiers de carotte quand on atteindra l'arrivée, c'est-à-dire une proportion de $\dfrac{8}{45}$ par rapport au stock initial.

Le principe se généralise assez bien : on consomme $2n-1$ carottes par kilomètre pour atteindre le kilomètre $\dfrac{1000}{2n-1}$, puis $2n-3$ carottes par kilomètre pour atteindre le kilomètre $\dfrac{1000}{2n-1}+\dfrac{1000}{2n-3}$, etc, jusqu'à atteindre un point où on peut finir le trajet d'une traite. Attention quand même, quand n va augmenter, on arrivera à amener plus de 1000 carottes à l'arrivée, ce qui fait qu'on atteint jamais la dernière étape « une carotte par kilomètre ». Plus tard, on n'atteindra même plus l'étape « trois carottes par kilomètre » etc. Mine de rien, ça change tout : la proportion de carottes amenées à la ville B diminue quand n varie de 3 à 8, mais remonte pour $n = 9$ (seuil à partir duquel la dernière étape disparait), diminue à nouveau à partir de $n = 12$ jusqu'à $n = 15$, remonte un peu etc. En fait, la limite de cette proportion ne vaut pas du tout 0 comme on pourrait l'imaginer. Si on fait des simulations Python (on peut atteindre le milliard de carottes si on est motivé), on constate une convergence du rapport vers une valeur valant approximativement 0.1353352832. Un nombre sans intérêt ? Pourtant, ses dix premières décimales sont exactement celles de $\dfrac{1}{e^2}$. Ce n'est sûrement pas un hasard (mais même en cherchant une formule pour calculer le nombre de carottes pour de grandes valeurs de n, vous n'arriverez pas à prouver la valeur de la limite).

Énigme 6 : les enfants pas sages.

Ce problème illustre de façon assez spectaculaire certains aspects de la théorie de l'information. Dans le premier cas (deux couleurs de chapeau), chaque enfant ne peut donner qu'une information binaire à son successeur. Mais en même temps, ce successeur a accès aux même informations que l'enfant précédent, à une exception près, le chapeau qu'il a sur la tête. Une information binaire suffit donc à pouvoir le sauver. La subtilité réside ensuite dans ce que doit faire le premier enfant pour donner une information permettant aux autres enfants de s'en sortir, sans avoir besoin de donner d'information supplémentaire à leur successeur (puisqu'ils n'ont pas le choix sur ce qu'ils doivent dire s'ils veulent sauver leur propre peau !). Quelques possibilités plus ou moins efficaces :

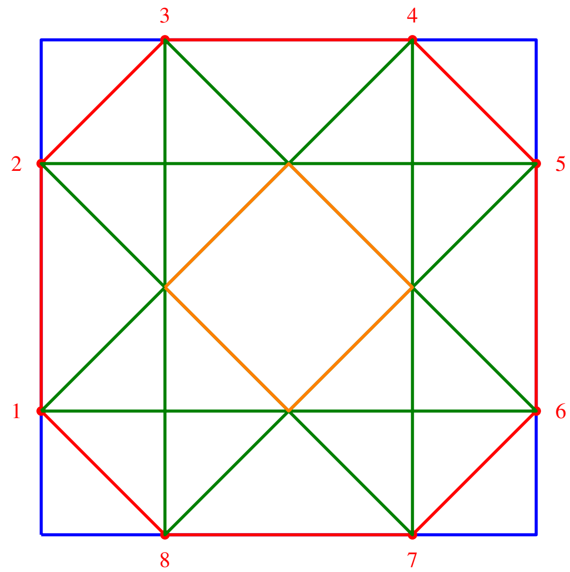
- le premier enfant donne la couleur du chapeau du suivant, ce qui permet à ce dernier de se sauver à coup sûr, puis on recommence : le troisième donne la couleur du chapeau du quatrième, qui va se sauver, etc. On sauvera donc à coup sûr cinq enfants, et les restants ont une chance sur deux de se sauver (s'ils ont la même couleur de chapeau que leur successeur), soit en moyenne $7,5$ enfants sauvés. Pas mal, mais cette tactique souffre de défauts évidents : on recommence à zéro après deux enfants, ce qui veut dire que le premier enfant ne tire pas partie de tout ce qu'il voit (si chaque enfant ne voyait que le chapeau du suivant, cette tactique serait optimale, là les premiers enfants ont beaucoup plus d'information à donner).
- une amélioration suprenante est la suivante : le premier enfant dit « vert » si les chapeaux des deux enfants suivants sont de la même couleur, « rouge » s'ils sont de couleur différente. L'enfant 2 qui voit la couleur du chapeau de l'enfant 3 peut donc se sauver à coup sûr (il sait si son chapeau est différent de celui de l'enfant 3), puis l'enfant 3 se sauvera aussi à coup sûr (maintenant il connait la couleur du chapeau de l'enfant 2 qui vient de se sauver). On recommence avec les enfants 4, 5 et 6 etc. Cette fois, on sauve avec certitude deux enfants sur trois, et les autres avec une chance sur deux, ce qui monte le nombre moyen d'enfants sauvés à 8. Bon, 20% de pertes, c'est acceptable, non ? Non, on peut faire encore très nettement mieux, car une fois de plus l'information transmise au début ne tient pas compte de tout ce que voit le premier enfant.
- quelle information globale sur les neuf chapeaux qu'il voit le premier enfant peut-il donc transmettre ? Une information nécessairement binaire, par exemple une parité ! Il va dire « vert » s'il voit un nombre pair de chapeaux verts, « rouge » sinon (pusiqu'il voit neuf chapeaux, il y aura alors un nombre pair de chapeaux rouges). L'enfant 2, qui voit huit chapeaux sur les neuf que voyait le premier, n'a aucun mal à en déduire la couleur du sien : par exemple si le premier enfant a dit « vert » et qu'il compte cinq chapeaux verts, son chapeau est forcément vert. Une fois que l'enfant 2 est sauvé, l'enfant 3 connait la couleur du chapeau de 2 et des sept autres qui sont devant lui, soit la couleur de huit chapeaux, il peut donc faire le même raisonnement que l'enfant 2 et se sauver à son tour, etc. On sauvera ainsi à coup sûr tous les enfants, sauf le premier qui n'aura qu'une chance sur deux de fêter Noël (mais de toute évidence, on ne peut pas faire mieux pour lui puisque personne ne voit son chapeau). Soit une moyenne de $9,5$ enfants sauvés, c'est plus que correct.

Et si on passe à trois couleurs de chapeaux ? On ne peut plus se contenter de parité mais le premier enfant peut donner trois informations au lieu de deux. Il suffit en fait d'adapter la méthode en remplaçant la parité (congruence modulo 2), par une congruence modulo. Si les trois couleurs sont vert, bleu et rouge, on décrète par exemp que vert$= 0$, bleu$= 1$ et rouge$= 2$. Le premier enfant compte alors le total obtenu à partir des neuf chapeaux qu'il voit, et transmet son reste modulo 3 aux autres enfants. Le deuxième enfant calcule la différence entre ce reste et celui qu'il peut lui-même obtenir à partir des huit derniers chapeaux, et l'écart entre les deux lui donne la couleur de son chapeau. Tous les enfants suivants pourront faire de même puisqu'ils auront connaissance de huit chapeaux sur neuf. On sauvera à nouveau à coup sûr les neuf derniers enfants, mais bien sûr le premier n'a plus qu'une chance sur trois de s'en sortir. Un exemple concret pour ceux qui ne sont pas convaincus (je ne donne que neuf chapeaux, le premier n'intervenant pas en pratique) : les chapeaux sont (dans l'ordre) bleu, vert, vert, rouge, bleu, vert, bleu, bleu, rouge. Le premier enfant calcule donc $1+0+0+2+1+0+1+1+2=8\equiv 2[3]$ donc annonce « rouge ». Le deuxième enfant, qui voit les huit derniers chapeaux, calculer $0+0+2+1+0+1+1+2=7\equiv 1[3]$, il constate que la différence par rapport au rouge annoncé par le premier enfant vaut 1, il annonce « bleu ». Le troisième enfant ajoute mentalement le chapeau bleu du deuxième aux sept chapeaux qu'il voit et calcule $0+2+1+0+1+1+2+1=8\equiv 2[3]$. Il compare à l'annonce du premier enfant, c'est la même valeur, il a donc un chapeau vert, etc.

Avec 10 couleurs, même pas plus dur ! On affecte une valeur entre 0 et 9 à chaque couleur, le premier enfant calcule la somme et annonce la couleur correspondant au chiffre des unités du nombre obtenu (reste de la division modulo 10). Cette information suffit au deuxième enfant à trouver la couleur de son chapeau, puis à chacun des suivants. Bien sûr, la proba qu'on sauve le premier enfant n'est plus que d'un dizième, ce qui descend le nombre moyen d'enfants sauvés à $9,1$. Mais c'est toujours nettement mieux que ce qu'on obtenait avec seulement deux couleurs de chapeaux en utilisant de mauvaises méthodes.

Énigme 7 : c'est l'heure du dessert !

Faisons donc un joli dessin. On supposera le carré initial de côté 1, et on place l'origine du repère au coin inférieur gauche du carré. Les huit sommets de l'octogone intérieur ont alors pour coordonnées (numérotés dans le même ordre que sur la figure ci-dessous) $(0,x)$, $(0,1-x)$, $(x,1)$, $(1-x,1)$, $(1,1-x)$, $(1,x)$, $(1-x,0)$ et $(x,0)$. Pour le schéma, on a pris $x=\dfrac{1}{4}$.



En fait, la valeur prise pour x est exactement celle pour laquelle le carré central est le plus grand possible : si on diminue x, le carré sera plus petit (les points seront plus proches des coins, donc les droites parallèles joignant les sommets 1 et 4 d'une part, 5 et 8 d'autre part seront plus rapprochées), et si on augmente la valeur de x, le carré n'existera plus, il traversera les droites horizontales et verticales. On peut bien sûr le démontrer plus rigoureusement en écrivant les équations de toutes les droites tracées et en imposant que l'intersection des droites « 14 » et « 27 » soit sur la droite verticale « 38 », les calculs sont très faciles. La conclusion l'est tout autant : l'octogone a une aire $1-2x^2=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$, et le carré central a pour côté $x\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, donc pour aire $\dfrac{1}{8}$. Autrement dit, le glaçage au Nutella recouvre un septième du gâteau, et le sirop d'érable recouvre donc six septièmes, soit un rapport exactement égal à $\dfrac{1}{6}$.