Devoir Maison n^o 7 : Spécial Noël

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 6 janvier 2021

Comme les vacances de Noël doivent être avant tout consacrées à ~~bouffer de la volaille~~ ~~recevoir des cadeaux tout moisis~~ se reposer pour reprendre les cours en pleine forme début janvier, ce DM ne comportera exceptionnellement pas de problème incompréhensible avec multiples erreurs d'énoncé, mais uniquement des petites énigmes mathématiques que je n'hésiterai même pas à qualifier de ludiques. Tout ceci est totalement facultatif, mais pour les courageux, il y a parfois de vraies maths cachées derrières.

Énigme 1 : un calendrier généreux.

Comme chaque année, le mois de décembre est l'occasion de manger plein de chocolats. Mais pour en profiter encore plus, cette année, je me suis créé un calendrier de l'Avent très généreux : la première case contient un chocolat, la deuxième en contient 2, la troisième en contient 6 (plus petit entier divisible par 1, 2 et 3), la quatrième en contient 12 (plus petit entier divisible par 1, 2, 3 et 4), et ainsi de suite (la case numéro n contient un nombre de chocolats égal au plus petit entier naturel divisible par tous les entiers de 1 à n). Y aura-t-il assez de chocolats sur la 24ème et dernière case de mon calendrier pour que je puisse en offrir un à chaque habitant de la planète (je serai moi-même mort d'indigestion depuis un certain temps de toute façon) ?

Énigme 2 : les boules de Noël.

La classe de MPSI vient de se faire livrer un lot de cinq boules pour décorer son sapin de Noël. Celles-ci arrivent rangées dans une boîte cylindrique de diamètre 20cm. Quatre boules identiques sont posées au fond de la boîte, leurs centres forment un carré, et elles sont tangentes aux faces latérales de la boîte et au couvercle de la boîte lorsque celle-ci est fermée. La cinquième boule, plus petite, est posée sur les quatre autres et tangente au couvercle de la boîte lorsque celle-ci est fermée. Quel est le diamètre de cette cinquième boule ?

Énigme 3 : L'âge du père Noël.

Comme chacun sait, le père Noël est très vieux. En fait, pas tant que ça puisqu'il a entre 80 et 150 ans. Et la denière fois qu'il a croisé mes deux enfants (qui n'ont pas le même âge), il a pu leur dire : « Le produit de nos trois âges est égal à la somme des carrés de nos âges ». Quel âge a-t-il donc (deux solutions possibles) ?

Énigme 4 : Probas chez les lutins.

Pour savoir quel lutins vont être de corvée d'emballage de cadeau ce matin, le père Noël lance simultanément sept dés à six faces. Sur chacune des faces est inscrit le nom d'un des six lutins du père Noël (chaque lutin a son nom qui apparait exactement une fois sur chaque dé). Tous les lutins dont le nom apparait sur au moins une face lors du lancer sont de corvée, quelle est la probabilité qu'aucun lutin ne puisse faire tranquillement la grasse matinée ? Quelle serait-elle si le père Noël ne lançait que six dés ? Et s'il lançait huit dés ?

Énigme 5 : à court de carottes.

Pour préparer au mieux son réveillon, le père Noël doit transporter un stock de carottes de la ville A où il réside, vers la ville B distante de 3 000 kilomètres. Pour cela, il utilise bien sûr son traîneau, mais celui-ci comporte deux inconvénients majeurs :

- il ne peut pas transporter plus de 1 000 carottes à la fois.
- pour le faire avancer, les rennes exigent de consommer une carotte au kilomètre (de façon continue, si on veut avancer de 500 mètres, ça coutera une demi-carotte). Bien sûr, ils se mettront en grève illimitée si le traîneau se retrouve à court de carottes.

Combien de carottes au maximum le père Noël peut-il espérer amener jusqu'à la ville B ? On précise que le père Noël a le droit de déposer des carottes n'importe où sur le trajet menant de A à B, en laissant à côté un écriteau « propriété du père Noël », personne ne les volera. Si on augmente le stock de carottes initiales jusqu'à n fois 1 000 carottes (on garde un nombre entier de milliers de carottes pour simplifier), quelle sera la limite de la proportion de carottes qu'on arrivera à amener jusqu'à la ville B quand n tend vers $+\infty$?

Énigme 6 : les enfants pas sages.

Dans un pays heureusement fort lointain, 10 enfants pas sages ont été condamnés à mort et enfermés en prison en attendant l'exécution de leur sentence. Mais comme c'est Noël, on leur laisse une chance de s'en sortir en procédant à l'amusante expérience suivante : on les aligne tous dans la cour de la prison, les uns derrière les autres (le premier voit les neuf autres enfants, le deuxième ne voit que les huit qui sont devant lui etc) et on met un chapeau rouge ou vert sur la tête de chaque enfant (on ne sait pas le nombre de chapeaux rouges et verts utilisés, c'est totalement aléatoire). Ensuite, chaque enfant en commençant par celui qui voit tous les autres a le droit de dire un seul mot : rouge ou vert. S'il dit la couleur de son chapeau, il est libéré, sinon il est soumis à une colle d'algèbre jusqu'à ce que mort s'ensuive. Les enfants ont le droit de mettre au point une tactique commune et ont une mémoire et une logique parfaites. Déterminer une stratégie permettant de sauver le maximum d'enfants possibles (indice : on peut faire nettement mieux que « la moitié sont sauvés à coup sûr et c'est une chance sur deux pour ceux qui restent »). Que se passe-t-il si on ajoute une troisième couleur possible pour les chapeaux ? Et si on passe à 10 couleurs ?

Énigme 7 : c'est l'heure du dessert !

Pour fêter dignement Noël, rien de tel qu'un bon gâteau. Mais la bûche, c'est surfait, on va donc plutôt manger un gâteau de forme octogonale. Pour cela, on commence par faire un gâteau carré, puis on coupe dans les coins que triangles rectangles isocèles identiques (l'octogone ainsi obtenu n'est pas forcément régulier). Ensuite, pour s'amuser, on trace huit diagonales à l'intérieur de notre octogone, en reliant les sommets dans l'ordre $1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1$ (les sommets étant initialement numérotés de 1 à 8 dans le sens des aiguilles d'une montre). Chose hilarante, ces diagonales délimitent alors un carré au centre du gâteau ! D'ailleurs, on s'est arrangé en découpant nos coins pour que ce carré soit le plus grand possible. Comme le gâteau (un subtil mélange de crème de marrons, de pâte d'amande et de ganache au cholat noir) est un peu léger à mon goût, on recouvre le carré central d'un glaçage au Nutella et le reste du gâteau de sirop d'érable gélifié. Quel est le rapport entre la surface couverte par le Nutella et celle couverte par le sirop d'érable ?