Devoir Maison n^o 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

13 décembre 2021

Problème : étude d'un groupe de transformations complexes.

I. Équations complexes de droites et de cercles.

1. Propriété de géométrie du collège : un point M d'affixe z appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle MAB est rectangle en M. Ici, la condition est donc que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, soit $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$, ou encore $(z-b)(\overline{z-a}) \in i\mathbb{R}$. Équation qu'on peut mettre sous la forme $z\overline{z} - \overline{a}z - b\overline{z} + \overline{a}b = 0$.
2. Pour une fois, soyons un peu brutaux et posons $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$, l'équation s'écrit alors $x^2 + y^2 + \alpha x - i\alpha y + i\beta x + \beta y + \alpha x + i\alpha y - i\beta x + \beta y + t = 0$, donc $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + t = 0$. Après mise sous forme canonique, on obtient donc $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - t = |a|^2 - t$. On reconnait l'équation du cercle de centre $I(-a)$ et de rayon $R = \sqrt{|a|^2 - t}$, à condition bien entendu d'avoir $|a^2| \geqslant t$.
3. Le point $M(z)$ appartient à la droite en question si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 0$, donc si $z_{\vec{u}}(\overline{z} - z_A) \in i\mathbb{R}$. On peut essayer de développer plus cette équation mais ça n'a pas grand intérêt.
4. Si $a = 0$ il est évident qu'on ne peut pas avoir une équation de droite (il ne reste que l'équation $t = 0$ qui est soit toujours vérifiée, soit jamais). Sinon, on va faire comme tout à l'heure et poser $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$ pour obtenir $\alpha x + i\alpha y - i\beta x + \beta y + \alpha x - i\alpha y + i\beta x + \beta y + t = 0$, soit $2\alpha x + 2\beta y + t = 0$. Il s'agit bien d'une équation de droite dans le plan (si $\beta \neq 0$, on peut la mettre sous la forme « $y = ax + b$ » et dans le cas contraire on a une équation de la forme « $x = c$ » qui est une équation de droite verticale. On obtient d'ailleurs toutes les droites du plan avec ces équations).

II. Une famille de transformations du plan complexe.

1. Essayons donc de résoudre l'équation : $Z\left(z\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = iz\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Pour que cette équation ait une solution unique, il suffit d'imposer $z \neq \dfrac{-i\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$, soit $z \neq \dfrac{1}{i\tan(\frac{\alpha}{2})}$.
2. Peut-on avoir $Z = 0$ dans la formule précédente ? Oui, si $z = \dfrac{-\sin(\frac{\alpha}{2})}{i\cos(\frac{\alpha}{2})} = i\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. L'énoncé raconte donc complètement n'importe quoi. En fait, l'ensemble de départ et d'arrivée de l'application n'est pas du tout $\mathbb{C}^*$ (cf question précédente). Si on résout l'équation « dans l'autre sens » on obtient $z = \dfrac{\sin(\frac{\alpha}{2}) - iZ\cos(\frac{\alpha}{2})}{Z\sin(\frac{\alpha}{2}) - i\cos(\frac{\alpha}{2})}$. Autrement dit, Z admet un antécédent z par T_α si et seulement si $Z \neq \dfrac{i\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$, soit $Z \neq \dfrac{i}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$, autrement dit même pas la même valeur que celle obtenue plus haut. Bref, ça ne fonctionne pas correctement, sauf le fait que T_α est bien bijective de $\mathbb{C}$ privé d'un point vers $\mathbb{C}$ privé d'un (autre) point.
3. Calculons donc brutalement $T_\alpha(T_\alpha(z))$, ce qui nous aidera de toute façon pour la suite. On a $T_\alpha(z) = \dfrac{iz\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})}{z\sin(\frac{\alpha}{2}) + i\cos(\frac{\alpha}{2})}$. Quitte à tout multiplier en haut et en bas par le dénominateur de la fraction, on en déduit que $T_\alpha(T_\alpha(z)) = \dfrac{i\cos(\frac{\alpha}{2})(iz\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})) + \sin(\frac{\alpha}{2})(z\sin(\frac{\alpha}{2}) + i\cos(\frac{\alpha}{2}))}{\sin(\frac{\alpha}{2})(iz\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})) + i\cos(\frac{\alpha}{2})(z\sin(\frac{\alpha}{2}) + i\cos(\frac{\alpha}{2}))}$

$= \dfrac{z(\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})) + 2i\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})}{2iz\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}) + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}$, soit beaucoup plus simplement (en utilisant une ou deux formules de duplication) $T_\alpha(T_\alpha(z)) = \dfrac{-z\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{iz\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ (remarquons qu'en multipliant en haut et en bas par $-i$, on se rend compte que tout ça est égal à $T_{2\alpha}(z)$, mais ce n'est pas le but de cette question). Cette expression est égale à z si $-z\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = iz^2\sin(\alpha) - z\cos(\alpha)$, soit $(z^2 - 1)\sin(\alpha) = 0$. Comme on veut que cette égalité soit vraie pour tout nombre complexe z (du moins ceux pour lesquels T_α est définie), on doit imposer $\sin(\alpha) = 0$, donc $\alpha \equiv 0[\pi]$. Cette condition correspond en fait à deux applications très particulière : si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, $T_\alpha(z) = z$, donc $T_\alpha = \text{id}$. Et si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, on a $T_\alpha(z) = \dfrac{1}{z}$, dont on constate en fait facilement qu'elle est bijective de $\mathbb{C}^*$ vers lui-même (là le résultat de la question 2 est vérifié...) et qu'elle est sa propre réciproque.

4. On a donc déjà éliminé le cas où l'application est égale à l'identité. Dans le cas où $T_\alpha(z) = \dfrac{1}{z}$, les seuls pointx fixes sont 1 et -1 puisqu'ils doivent vérifier $z^2 = 1$. Dans tous les autres cas, si z est un point fixe de T_α, il va aussi l'être pour $T\alpha \circ T_\alpha$. Or, la question précédente montre que les seuls invariants de $T_\alpha \circ T_\alpha$ sont les nombres z vérifiant $z^2 - 1 = 0$. Il n'y a donc à nouveau que deux fixes (toujours les mêmes) : $z = 1$ et $z = -1$.

5. En reprenant l'expression calculée pour Z et en mettant tout au même dénominateur, $\dfrac{Z-1}{Z+1} = \dfrac{iz\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2}) - z\sin(\frac{\alpha}{2}) - i\cos(\frac{\alpha}{2})}{iz\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2}) + z\sin(\frac{\alpha}{2}) + i\cos(\frac{\alpha}{2})} = \dfrac{(z-1)(i\cos(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2}))}{(z+1)(i\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2}))}$. Quitte à multiplier par $-i$ en haut et en bas, $\dfrac{Z-1}{Z+1} = \dfrac{z-1}{z+1} \times \dfrac{\cos(\frac{\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\alpha}{2})} = \dfrac{z-1}{z+1} \times \dfrac{z^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{z-1}{z+1}e^{i\alpha}$.

6. Pour cette question, on peut bien sûr être masochiste et refaire un gros calcul très similaire à celui de la question 3 (avec à nouveau quelques formules de trigonométrie en passant). On peut aussi exploiter la question précédente : en notant $Z' = T_\beta(Z) = T_\beta(T_\alpha(z))$, on aura $\dfrac{Z'-1}{Z'+1} = \dfrac{Z-1}{Z+1}e^{i\beta} = \dfrac{z-1}{z+1}e^{i\alpha}e^{i\beta} = \dfrac{z-1}{z+1}e^{i(\alpha+\beta)}$. Ceci prouve que $Z' = T_{\alpha+\beta}(z)$ et donc que $T\beta \circ T_\alpha = T_{\alpha+\beta}$ (pour être extrêmement rigoureux, ajoutons que ce calcul n'est valable a priori que si $z \neq -1$, mais cette valeur particulière ne pose aucun problème puisque -1 est point fixe de toutes les applications T_α.

   Notons pour tout la suite du problème $G = \{T_\alpha\}$, alors l'opération de composition est associative dans G (elle l'est pour toutes les applications définies sur $\mathbb{C}$), et interne puisqu'on vient de prouver que $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta} \in G$. De plus, G contient un élément neutre $T_0 = \text{id}$ et toute application de G admet une réciproque appartenant à G puisque le calcul qu'on vient d'effectuer prouver que $T_\alpha \circ T_{-\alpha} = T_0 = \text{id}$. C'est donc bien un groupe, et même un groupe commutatif (toujours d'après le même calcul de composée). En fait, on a même prouvé plus que ça : l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & G \\ \alpha & \mapsto & T_\alpha \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes. On peut aller plus loin : son noyau est constitué de tous les réels congrus à 0 modulo 2π. L'application $\varphi' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & G \\ z = e^{i\alpha} & \mapsto & T_\alpha \end{array} \right.$ est alors un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{U}, \times)$ vers $(G, \circ)$.

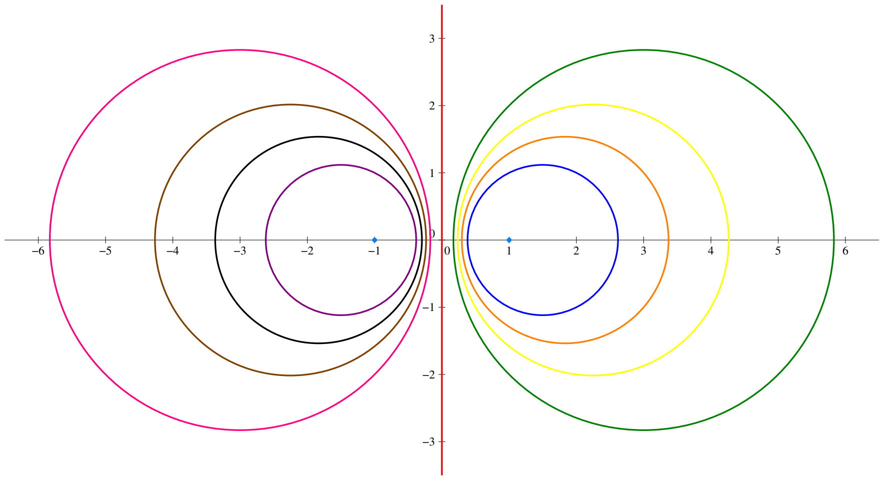
III. Les trajectoires de l'action de T.

1. Allons-y pour un calcul brutal : posons $z = x + iy$ et $t = a + ib$, puis élevons tout au carré après avoir passé les dénominateurs de l'autre côté de l'égalité : $((x-1)^2 + y^2)((a+1)^2 + b^2) = ((x+1)^2 + y^2)((a-1)^2 + b^2)$, soit $(x-1)^2(a+1)^2 + 4ay^2 = (x+1)^2(a-1)^2 + 4xb^2$, donc $4ax^2 + 4a + 4ay^2 = 2x(2a^2 + 2) + 4xb^2$, ou encore après simplification par 4 : $ax^2 + ay^2 - x(a^2 + b^2 + 1) + a = 0$. En supposant t non imaginaire pur, donc $a \neq 0$, on peut simplifier par a et trouver une équation de cercle de la forme $x^2 + y^2 + \gamma x + 1 = 0$ (peu importe la valeur du coefficient γ), qui est bien un cercle dont l'affixe du centre est réelle (pas de terme en y dans l'équation). Le cercle en question peut éventuellement être vide, ça n'invalide pas la question (dans ce cas, l'ensemble de points étant vide, il est inclus dans n'importe quel cercle).

2. C'est une application évidente de la question précédente et de la question $II.5$ puisque $\left|\dfrac{Z-1}{Z+1}\right| = \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|$. Seul cas particulier : $z = -1$, pour lequel l'ensemble des points $T_\alpha(z)$ est de toute façon

réduit à l'unique point d'affixe -1, qui conctitue lui-même un cercle de rayon 0. Ah non, il y a quand même les cas où z est imaginaire pur ! Dans ce cas, l'équation de la question précédente devient simplement $(b^2+1)x = 0$, ce qui signifie que l'ensemble n'est plus du tout un cercle, mais simplement l'axi imaginaire pur lui-même !

3. C'est en fait automatique une fois qu'on a prouvé dans la partie II que l'ensemble G était un groupe. Donnons quand même une nouvelle fois les justifications : $z = T_0(z)$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive. Si $z_2 = T_\alpha(z_1)$, alors $z_1 = T_{-\alpha}(z_2)$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive, et enfin si $z_3 = T_\beta(z_2)$ et $z_2 = T_\alpha(z_1)$, alors $z_3 = T_{\alpha+\beta}(z_1)$, ce qui prouve la transitivité.
4. Il existe deux classes d'équivalence particulières réduites à un seul point : celle qui contient 1 et celle qui contient -1. Le reste du temps, on a déjà vu que les classes d'équivalence seraient incluses dans des cercles (et même égales au cercle tout entier, puisque la formule de la question $II.5$ montre que tous les points vérifiant l'égalité de module sont atteints, donc tous les points du cercle) dont le centre est situé sur l'axe réel. Plus précisément, si on reprend l'équation obtenue à la question $III.1$, on aurait un cercle d'équation $x^2+y^2-\dfrac{a^2+b^2+1}{a}x = -1$, soit $\left(x-\dfrac{a^2+b^2+1}{2a}\right)^2+y^2 = \dfrac{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}{4a^2}$, donc un cercle de centre $I\left(\dfrac{a^2+b^2+1}{2a}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2|a|}$. Dernière classe d'équivalence un peu particulière : l'axe imaginaire pur. Sur la figure suivante, on a représenté quelque classes : cercles correspondant à $z = 1+i$ en bleu, $1+2i$ en vert, $2+2i$ en jaune, $3+i$ en orange, $-1+i$ en violet, $-1+2i$ en rose, $-2+2i$ en marron et $-3+i$ en noir (si on pouvait tracer « tous »les cercles, ils recouvriraient intégralement le plan complexe, en-dehors des deux points isolés d'affixes 1 et -1 et de l'axe imaginaire pur).



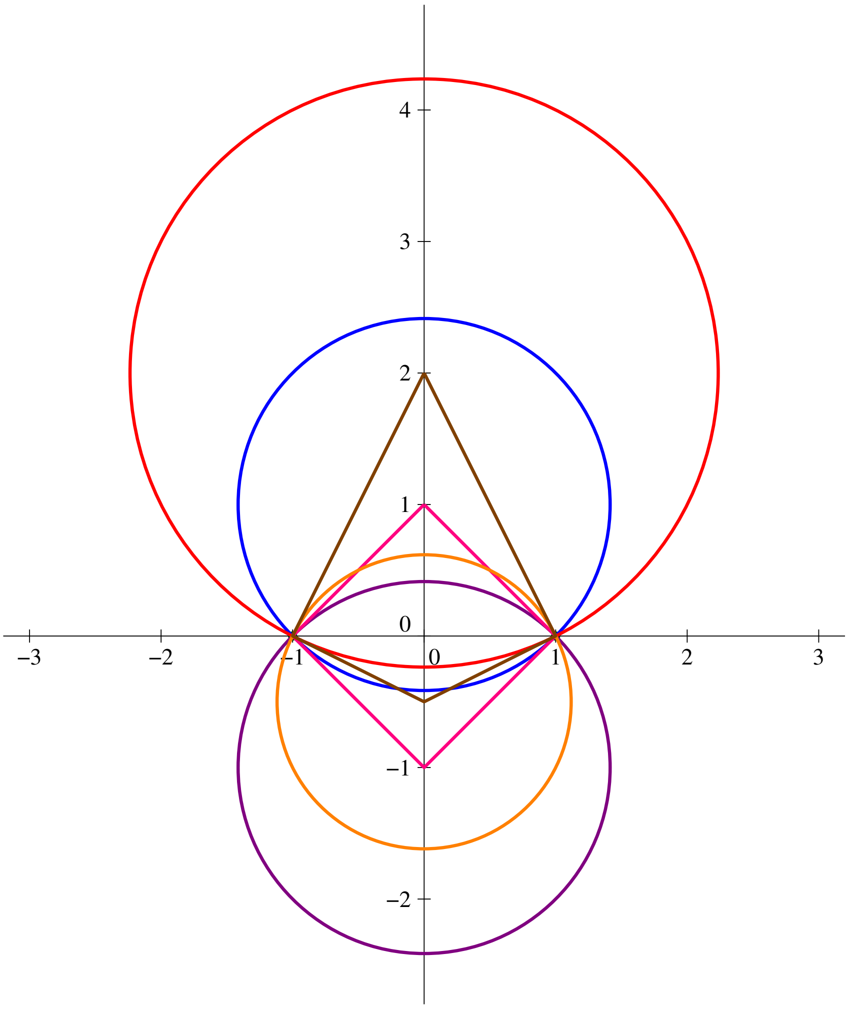
IV. Un cas particulier.

1. Commençons déjà par exprimer Z en fonction de z dans ce cas particulier : quitte à tout simplifier par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on aura $Z = \dfrac{iz+1}{z+i}$. Si z a une image sur le cercle trigonométrique, on peut écrire $z = e^{i\theta}$, puis calculer $Z = \dfrac{ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}+i} = \dfrac{1+e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}(e^{i(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})})}{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})})} = \dfrac{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}{2\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} \in \mathbb{R}$, donc l'image du cercle unité est simplement incluse dans l'axe réel.
2. J'ai l'impression de rater une façon plus simple de faire les choses à cette question, mais les calculs un peu barbares fonctionnent bien, alors c'est que je vais vous proposer, tout en exploitant les résultats de la première partie dont on ne s'est pas trop servis pour l'instant. Le cercle $(\mathcal{C})$ a une équation de la forme $z\overline{z}+a\overline{z}+\overline{a}z+t = 0$, et comme il contient les points d'affixe 1 et -1, cela impose les conditions $1+a+\overline{a}+t = 1-a-\overline{a}+t = 0$, donc (en additionnant et soustrayant les équations), $t = -1$ et $a = -\overline{a}$, soit $a = i\alpha \in i\mathbb{R}$ (ce qui n'est pas une surprise, un cercle passant par 1 et -1 a forcément son centre sur la médiatrice du segment reliant ces deux points, donc sur l'axe imaginaire pur). Comme 1 et -1 sont des points fixes de T_α, si $\mathcal{C}'$ est un cercle, il passera lui aussi par 1 et -1 et aura donc également une équation de la forme $z\overline{z}+i\alpha\overline{z}+-i\alpha z-1 = 0$. Essayons alors de déterminer

un réel β pour lequel on aura toujours $Z\overline{Z} + i\beta\overline{Z} - i\beta Z - 1 = 0$, ce qui prouvera que l'image Z de z appartient bien à un cercle (passant donc par 1 et -1). C'est là que le calcul est un peu brutal, notre condition s'écrit $\dfrac{iz+1}{z+i} \times \dfrac{1-i\overline{z}}{\overline{z}-i} + i\beta\left(\dfrac{1-i\overline{z}}{\overline{z}-i} - \dfrac{iz+1}{z+i}\right) = 1$, soit en multipliant tout par les deux dénominateurs $iz+z\overline{z}+1-i\overline{z}+(i\beta+\beta\overline{z})(z+i)-(i\beta-\beta z)(\overline{z}-i) = z\overline{z}-iz+i\overline{z}+1$. On simplifie ce qu'on peut et on développe le reste : $2iz - 2i\overline{z} + i\beta z - \beta + \beta z\overline{z} + i\beta\overline{z} - i\beta\overline{z} - \beta + \beta z\overline{z} - i\beta z = 0$. Deux simplifications et une division par 2 plus tard, il ne reste en fait que $iz - i\overline{z} - \beta + \beta z\overline{z} = 0$. On retrouve donc une équation du type $z\overline{z} + \dfrac{i}{\beta}(z-\overline{z}) - 1 = 0$, qui n'est autre que l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ si on pose $\beta = -\dfrac{1}{\alpha}$. On ne peut bien sûr pas avoir $\alpha = 0$ sinon le cercle $\mathcal{C}$ serait le cercle trigonométrique dont on a traité le cas à la question précédente. On a donc prouvé que l'image du cercle $(\mathcal{C})$ centré en $I(i\alpha)$ passant par 1 et -1 incluait le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $J\left(-\dfrac{i}{\alpha}\right)$ passant lui aussi par 1 et -1. La réciproque est évidente puisqu'il s'agit exactement du même calcul. Les images de tous nos cercles sont donc bien des cercles.

3. Dans tout énoncé difficile il y a une question débile mal cachée en plein milieu. La voici : l'intersection de deux cercles non confondus (et on sait que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ne le sont jamais puisqu'ils n'ont pas le même centre) ne peut pas contenir plus de deux points. Or, nos cercles passent toujours par 1 et -1, qui sont donc leurs seuls points d'intersection.

4. Comme on l'a vu plus haut, les centres de nos cercles ont pour affixes $i\alpha$ et $i\dfrac{i}{\alpha}$, pour un certain réel non nul α. Les deux rayons issus de -1 ont donc pour affixe $z_1 = 1 + i\alpha$ et $z_2 = 1 - \dfrac{i}{\alpha}$. Calculons donc $z_1\overline{z_2} = (1+i\alpha)\left(1+\dfrac{i}{\alpha}\right) = 1 + i\alpha + \dfrac{i}{\alpha} - 1 \in i\mathbb{R}$, ce qui prouve bien que les vecteurs correspondants sont orthogonaux. Même calcul pour les rayons issus de -1 (on peut aussi utiliser la symétrie de la figure par rapport à l'axe imaginaire pur pour ne pas s'embêter). Ci-dessous une figure avec quelques-uns de ces cercles : $(\mathcal{C}_1)$ centré en i, $(\mathcal{C}'_1)$ centré en $-i$ (en bleu et violet, avec les rayons en rose, les rayons ont alors la même longueur et forment un carré), puis $(\mathcal{C}_2)$ centré en $2i$, $(\mathcal{C}'_2)$ centré en $-\dfrac{i}{2}$ (en rouge et orange, avec les rayons en marron, qui forment cette fois-ci un « cerf-volant ») :


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3