Devoir Maison n^{o} 6

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 13 décembre 2021

Problème : étude d'un groupe de transformations complexes.

I. Équations complexes de droites et de cercles.

1. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b. Déterminer l'équation complexe du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Montrer que l'équation complexe $z\overline{z} + a\overline{z} + \overline{a}z + t = 0$ (avec $a \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$) est l'équation d'un cercle si et seulement si $|a|^2 \geqslant t$.
3. Soit $A(a)$ un point du plan complexe et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, d'affixe complexe z_u. Déterminer une équation complexe de la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{u}$.
4. Montrer que l'équation complexe $az+\overline{az}+t = 0$ est l'équation d'une droite si et seulement si $a \neq 0$.

II. Une famille de transformations du plan complexe.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note (E) l'équation complexe $Zz\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i(Z-z)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ (avec $(Z,z) \in \mathbb{C}^2$).

1. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'équation (E) admet une unique solution Z (une fois z fixé, donc). On notera alors $T_\alpha(z) = Z$.
2. Montrer que l'application T_α est bijective de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}^*$.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T_α est sa propre réciproque.
4. On suppose que $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$. Déterminer les points fixes de T_α.
5. Montrer que, si $z \neq -1$, l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{Z-1}{Z+1} = \dfrac{z-1}{z+1}e^{i\alpha}$.
6. Que vaut $T_\alpha \circ T_\beta$? En déduire que l'ensemble de toutes les applications T_α, muni de l'opération de composition, est un groupe. Est-il commutatif ?

III. Les trajectoires de l'action de T.

1. Soit t un nombre complexe qui n'est pas imaginaire pur. Montrer que l'ensemble des points dont l'affixe vérifie l'équation $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$ est inclus dans un cercle dont le centre a une affixe réelle.
2. Montrer que, si on fixe la valeur de z, l'ensemble des points d'affixes $T_\alpha(z)$, pour α variant dans $\mathbb{R}$, est inclus dans un cercle.
3. On définit sur $\mathbb{C}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par $z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R},\ T_\alpha(z_1) = z_2$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
4. Déterminer les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ (et leur image géométrique dans le plan complexe).

IV. Un cas particulier.

On pose dans cette dernière partie $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, et on note $f = T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que l'image par f du cercle trigonométrique est incluse dans une droite à préciser.
2. Montrer que l'image par f de tout cercle $(\mathcal{C})$ passant par les points fixes calculés en question II.4 est un cercle $(\mathcal{C}')$.
3. Déterminer les points communs entre les deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
4. Montrer que les rayons de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ issus de l'un des points fixes sont orthogonaux.