Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

25 novembre 2021

Problème

I. Résolution d'une équation différentielle.

1. On va calculer $F(x) = \int^x \sin(t)e^{-t}\ dt$ à l'aide d'une double IPP circulaire. On pose dans un premier temps $u(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = \cos(t)$, et $v'(t) = e^{-t}$ qu'on peut intégrer en $v(t) = -e^{-t}$. On obtient donc $F(x) = -\sin(x)e^{-x} + \int^x \cos(t)e^{-t}\ dt$. On recommence en posant cette fois $u(t) = \cos(t)$, $u'(t) = -\sin(t)$ et les mêmes fonctions pour v' et v, ce qui donne $F(x) = -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} - \int_x \sin(t)e^{-t}\ dt$, soit $F(x) = -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) - F(x)$ (à une constante près), ce qui implique $F(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Il suffit de poser $K = 0$ dans la formule précédente, donc $F(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.
3. Calculons donc : $F'(x) = f(x) = \sin(x)e^{-x}$, puis $F''(x) = f'(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^{-x}$, donc $F''(x) + 2F'(x) + 2F(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x) + 2\sin(x) - \cos(x) - \sin(x)) = 0$. Ah ben oui, ça marche.
4. Il s'agit d'une équation du second ordre homogène à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et admet pour racines $r_1 = \dfrac{-2+2i}{2} = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. Les solutions de l'équation sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto (A\cos(x) + B\sin(x))e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
5. La condition $y(0) = 1$ se traduit directement par $A = 1$. Pour exploiter la deuxième, il faut dériver : $y'(x) = (B\cos(x) - A\sin(x) - A\cos(x) - B\sin(x))e^{-x}$, donc $y'0) = -2$ si $B - A = -2$, donc $B = -1$. Finalement, la solution recherchée est définie par $y(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^{-x}$.

Une première suite d'intégrales.

1. C'est le même calcul (ou presque) qu'à la toute première question, alors pour changer on va le faire en sens inverse. Commençons par poser $u(t) = e^{-nt}$, donc $u'(t) = -ne^{-nt}$, et $v'(t) = \sin(t)$ qu'on intègre en $v(t) = -\cos(t)$. On obtient donc $I_n = [-\cos(t)e^{-nt}]_0^\pi - n\int_0^\pi \cos(t)e^{-nt}\ dt = e^{-n\pi} + 1 - \int_0^\pi \cos(t)e^{-nt}\ dt$. On y retourne en posant toujours $u(t) = e^{-nt}$ et $u'(t) = -ne^{-nt}$, mais cette fois $v'(t) = \cos(t)$, donc $v(t) = \sin(t)$. On trouve cette fois $I_n = e^{-n\pi} + 1 - n[\sin(t)e^{-nt}]_0^\pi - n^2\int_0^\pi \sin(t)e^{-nt}\ dt = e^{-n\pi} + 1 - n^2 I_n$. On en déduit que $I_n = \dfrac{e^{-n\pi}+1}{n^2+1}$.
2. Pas l'ombre d'une forme indéterminée, cette limite est nulle.
3. On écrit donc joyeusement $I_n = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^\pi e^{(i-n)t} - e^{(-i-n)t}\ dt$
$= \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{e^{(i-n)t}}{i-n} + \dfrac{e^{(-i-n)t}}{i+n}\right]_0^\pi = \dfrac{1}{2i}\left(-\dfrac{e^{-n\pi}}{i-n} - \dfrac{e^{-n\pi}}{i+n} - \dfrac{1}{i-n} - \dfrac{1}{i+n}\right)$. Or, $\dfrac{1}{i-n} + \dfrac{1}{i+n} = \dfrac{i+n+i-n}{-1-n^2} = -\dfrac{2i}{1+n^2}$, on peut donc simplifier tout ça pour obtenir très simplement $I_n = \dfrac{e^{-n\pi}+1}{n^2+1}$. On retrouve la même formule que précédemment.

Une deuxième suite d'intégrales.

1. Calculons donc $J_0 = \int_0^{\pi} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^{\pi} = 1 - e^{-\pi}$. Le calcul de J_1 a déjà été effectué plus haut puisque $J_1 = I_1 = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$. Pour J_2, commençons par utiliser les formules de duplication pour écrire que $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, donc $J_2 = \dfrac{1}{2}J_0 - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(2t)e^{-t}\, dt$. Calculons la dernière intégrale écrite à l'aide d'une double IPP : on pose d'abord $u(t) = \cos(2t)$, donc $u'(t) = -2\sin(2t)$, et $v'(t) = e^{-t}$ qu'on intègre en $v(t) = -e^{-t}$ pour obtenir $\int_0^{\pi} \cos(2t)e^{-t}\, dt = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin(2t)e^{-t}\, dt = 1 - e^{-\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin(2t)e^{-t}\, dt$, et on repart pour une IPP en posant $u(t) = \sin(2t)$, donc $u'(t) = 2\cos(2t)$, et $v'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$ comme tout à l'heure. Finalement, $\int_0^{\pi} \cos(2t)e^{-t}\, dt = 1 - e^{-\pi} + 2[\sin(2t)e^{-t}]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \cos(2t)e^{-t}\, dt$, dont on déduit $\int_0^{\pi} \cos(2t)e^{-t}\, dt = \dfrac{1-e^{-\pi}}{5}$, puis $J_2 = \dfrac{1-e^{-\pi}}{2} - \dfrac{1-e^{-\pi}}{10} = \dfrac{2(1-e^{-\pi}}{5}$.
2. La fonction intégrée étant positive sur tout l'intervalle $[0,\pi]$, l'intégrale J_n est clairement positive. Pour la monotonie, il suffit de signaler que $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ (sur l'intervalle d'intégration), donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$, puis $0 \leqslant \sin^{n+1}(t)e^{-t} \leqslant \sin^n(t)e^{-t}$ (on multiplie l'encadrement par une quantité positive). Il ne reste plus qu'à intégrer cet encadrement entre 0 et π pour en déduire que $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$, autrement dit que la suite (J_n) est décroissante.
3. La suite étant décroissante et minorée par 0, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge.
4. Effectuons donc une IPP à partir de J_{n+2} en posant $u(t) = \sin^{n+2}(t)$, donc $u'(t) = (n+2)\sin^{n+1}(t)\cos(t)$, et comme d'habitude $v'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On obtient $J_{n+2} = [-e^{-t}\sin^{n+2}(t)]_0^{\pi} + (n+2)\int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t)\cos(t)e^{-t}\, dt$. Le crochet s'annule, il ne reste plus qu'à refaire une IPP sur l'intégrale restante. On ne change pas v' et v et on pose $u(t) = \sin^{n+1}(t)\cos(t)$ pour obtenir $u'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos^2(t) - \sin^{n+2}(t) = (n+1)\sin^n(t) - (n+2)\sin^{n+2}(t)$ en utilisant la relation $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$. On en déduit $J_{n+2} = (n+2)[-e^{-t}\sin^{n+1}(t)\cos(t)]_0^{\pi} + (n+2)\int_0^{\pi} ((n+1)\sin^n(t) - (n+2)\sin^{n+2}(t))e^{-t}\, dt = (n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}$. Autrement dit, $(n^2+4n+5)J_{n+2} = (n^2+3n+2)J_n$, et $J_{n+2} = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+4n+5}J_n$.
5. On applique la formule pour $n = 1$: $J_3 = \dfrac{6}{10}J_1 = \dfrac{3(1-e^{-\pi})}{10}$, puis pour $n = 2$: $J_4 = \dfrac{12}{17}J_2 = \dfrac{24(1-e^{-\pi})}{85}$.
6. (a) Bon, soyons honnêtes, cette question est horrible avec une borne $\dfrac{\pi}{2}$ en haut de l'intégrale, alors qu'elle est presque triviale avec π comme borne supérieure et que ça suffit à traiter la suide de l'exercice. La version facile : $\forall t \in [0,\pi]$, $e^{-t} \leqslant 1$, donc $\sin^n(t)e^{-t} \leqslant \sin^n(t)$, et il suffit d'intégrer cette inégalité entre 0 et π pour obtenir $J_n \leqslant \int_0^{\pi} \sin^n(t)\, dt$. Une idé de la version compliquée quand même :

   - On note $K_n = \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^n(t)\, dt$ et on veut donc prouver que $J_n \leqslant K_n$ (oui, j'utilise le résultat de la question précédente pour ne pas trop m'embêter).
   - On découpe J_n en deux morceaux : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(t)e^{-t}\, dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^n(t)e^{-t}\, dt$.
   - Dans le deuxième morceau, on majore simplement e^{-t} par $e^{-\frac{\pi}{3}}$ pour obtenir $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^n(t)e^{-t}\, dt \leqslant e^{-\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^n(t)\, dt \leqslant 2K_n e^{-\frac{\pi}{3}} \simeq 0.7K_n$.

- Le premier morceau est clairement plus petit que $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(t)\ dt$. Il reste à se convaincre que cette portion de l'intégrale de $\sin^n(t)$ représente une fraction suffisamment faible pour qu'additionnée au deuxième morceau on ne dépasse pas K_n. Et ça c'est très pénible à faire par des moyens pas trop calculatoires, hélas.

En fait, on peut tricher et démontrer l'inégalité par récurrence : pour $n = 0$, $J_0 = 1 - e^{-\pi} \simeq 0.96$ et $K_0 = \frac{\pi}{2} > 1.5$, l'inégalité est largement vérifiée au rang 0. Pour $n = 1$, $J_1 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \simeq 0.52$ et $K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Ensuite, on peut prouver la relation de récurrence $K_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} K_n$ (cf par exemple le problème 2 de la feuille d'exercices). Or, $\frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)^2} \geqslant \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)^2+1}$, donc l'hypothèse $J_n \leqslant K_n$ implique $\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)^2+1} J_n \leqslant \frac{n+1}{n+2} K_n$, c'est-à-dire $J_{n+2} \leqslant K_{n+2}$. Avec la double initialisation prouvée, cela suffit à prouver que la propriété $J_n \leqslant K_n$ est toujours vraie (on ne fait pas vraiment une récurrence double puisqu'on n'utilise qu'une seule hypothèse de récurrence pour l'hérédité, mais plutôt deux récurrences distinctes pour les entiers pairs et pour les entiers impairs).

(b) Pour la version rigoureuse, on effectue le changement de variable $x = \pi - t$, les bornes deviennent π et $\frac{\pi}{2}$ (dans cet ordre), l'expression dans l'intégrale n'est pas modifiée puisque $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, et on aura $dx = -\ dt$, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt = -\int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(t)\ dt$. La version non rigoureuse : la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, donc celle de $t \mapsto \sin^n(t)$ également, ce qui prouve l'égalité des aires sous les courbes et donc des intégrales.

(c) On applique la relation de Chasles : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt = \int_0^x \sin^n(t)\ dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$. La première intégrale peut être majorée par $\int_0^x \sin^n(x)\ dt = x \sin^n(x)$ en appliquant simplement la croissance de la fonction $\sin^n$ sur l'intervalle $[0, x]$ pour montrer que $\sin^n(t) \leqslant \sin^n(x)$ sur l'intervalle $[0, x]$. Pour le deuxième morceau, c'est encore plus simple, on majore le sinus par 1 et on en déduit que $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt \leqslant \int_x^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2} - x$. On additionne les deux majorations pour obtenir $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt \leqslant x \sin^n(x) + \frac{\pi}{2} - x$.

(d) Puisque $x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \sin(x) < 1$, donc toute suite géométrique de raison $\sin(x)$ aura une limite nulle. En particulier la suite $(x \sin^n(x))$ est décroissante de limite nulle, ce qui prouve qu'elle prend des valeurs inférieures à n'importe quel réel positif $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang. C'est exactement ce qu'on devait prouver.

(e) On fixe $\varepsilon > 0$, puis on choisit un réel $x \in \left]\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit une valeur de n_0 à partir de laquelle $0 < x \sin^n(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme de plus, par construction, $0 < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\varepsilon}{2}$, on peut additionner ces deux inégalités pour en déduire que $x \sin^n(x) + \frac{\pi}{2} - x < \varepsilon$, et donc que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt \leqslant \varepsilon$. A fortiori, $0 \leqslant J_n \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, ce qui prouve la convergence de la suite (J_n) vers 0.