Devoir Maison n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 25 novembre 2021

Problème

I. Résolution d'une équation différentielle.

On considère dans cette partie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)e^{-x}$.

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
2. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Vérifier par le calcul que F est solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
4. Résoudre complètement l'équation différentielle de la question précédente.
5. Déterminer l'unique solution de l'équation vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

Une première suite d'intégrales.

On définit dans cette partie, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)e^{-nt}\,dt$.

1. Calculer I_n à l'aide d'une double intégration par parties.
2. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Retrouver la valeur de I_n à l'aide d'un calcul direct d'intégrale complexe (on partira de la formule d'Euler $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, et on admettra que toute fonction complexe de la forme $t \mapsto e^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$ a pour dérivée ae^{at} et pour primitive $t \mapsto \dfrac{1}{a}e^{at}$).

Une deuxième suite d'intégrales.

On pose désormais $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)e^{-t}\,dt$ (où n est toujours un entier naturel).

1. Calculer les valeurs de J_0, J_1 et J_2.
2. Quel est le signe de J_n ? Et la monotonie de la suite (J_n) ? On donnera des justifications intuitives, en s'appuyant sur le fait que $f(t) \leqslant g(t) \Rightarrow \displaystyle\int f \leqslant \int g$ si l'inégalité est valable sur tout l'intervalle d'intégration.
3. Montrer que la suite (J_n) est convergente.
4. En utilisant (au moins) une IPP, déterminer une relation entre J_{n+2} et J_n.
5. En déduire les valeurs de J_3 et J_4.
6. On souhaite prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant J_n \leqslant \varepsilon$ (c'est la définition de la limite d'une suite que nous verrons bientôt en cours).
   (a) Montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.
   (b) Montrer rigoureusement que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(t)\,dt$ (un changement de variable fera l'affaire). Pourquoi était-ce intuitivement évident (un dessin suffira ici) ?
   (c) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt \leqslant x\sin^n(x) + \dfrac{\pi}{2} - x$.
   (d) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $0 < x\sin^n(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (e) Conclure.