Devoir Maison n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 novembre 2021

Exercice

1. Le dénominateur de la fraction se factorise sous la forme $k^3+k^2-2k = k(k^2+k-2) = k(k-1)(k+2)$ (les racines sont ici évidentes, mais on peut bien sûr calculer un discriminant après avoir factorisé par k si on est soudain frappé de cécité), donc le théorème de décomposition en éléments simples nous assure l'existence de trois réels a, b et c tels que $\dfrac{k+1}{k^3+k^2-2k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} + \dfrac{c}{k+2}$. Pour obtenir les valeurs de ces trois réels, on peut utiliser l'une des deux méthodes habituelles :

   - mettre au même dénominateur : $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} + \dfrac{c}{k+2} = \dfrac{a(k^2+k-2)+b(k^2+2k)+c(k^2-k)}{k(k-1)(k+2)} = \dfrac{(a+b+c)k^2+(a+2b-c)k-2a}{k^3+k^2-2k}$. L'idéntification avec la fraction initiale donne directement $-2a = 1$, donc $a = -\dfrac{1}{2}$, dont on déduit (à l'aide des deux autres coefficients) les équations supplémentaires $b+c = \dfrac{1}{2}$ et $2b-c = \dfrac{3}{2}$. Une simple addition de ces équations donne alors $3b = 2$, donc $b = \dfrac{2}{3}$, puis $c = \dfrac{1}{2} - b = -\dfrac{1}{6}$. Conclusion : $\dfrac{k+1}{k^3+k^2-2k} = -\dfrac{1}{2k} + \dfrac{2}{3(k-1)} - \dfrac{1}{6(k+2)}$.
   - utiliser les astuces de multiplication : on multiplie tout par k pour trouver $\dfrac{k+1}{k^2+k-2} = a + \dfrac{bk}{k-1} + \dfrac{ck}{k+2}$, puis on pose $k=0$, ce qui donne $a = -\dfrac{1}{2}$. De même, on multiplie par $k-1$ pour trouver $\dfrac{k+1}{k^2+2k} = \dfrac{a(k-1)}{k} + b + \dfrac{c(k-1)}{k+2}$, et on pose ensuite $k=1$, ce qui donne cette fois $b = \dfrac{2}{3}$. Pour le dernier coefficient on multiplie par $k+2$ pour avoir $\dfrac{k+1}{k^2-k} = \dfrac{a(k+2)}{k} + \dfrac{b(k+2)}{k-1} + c$, et poser $k=-2$ permet de trouver $x = -\dfrac{1}{6}$. On conclut bien sûr de la même façon qu'avec la première méthode.

2. Le télescopage est un peu pénible à mettre en place puisqu'il y a un décalage de trois unités avant que les termes en $\dfrac{1}{k-1}$ se simplifient avec ceux en $\dfrac{1}{k+2}$ (par exemple, le dénominateur sera égal à 4 pour le premier terme quand $k=4$, pour le deuxième quand $k=5$ et pour le troisième quand $k=2$). Le mieux est de tout faire avec des décalages d'indice (on suppose k suffisamment grand, au moins égal à 5, pour ne pas avoir de problèmes avec les décalages) : $S_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k+2} = -\dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+2}\dfrac{1}{k}$. Les termes communs aux trois sommes correspondent aux indices compris entre 4 et $n-1$, on isole donc tous les autres (neuf termes au total, trois par somme) : $S_n = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=4}^{n-1}\dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{3}\sum_{k=4}^{n-1}\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+2}\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{6n} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)} = -\dfrac{5}{12} + \dfrac{11}{9} - \dfrac{2}{3n} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)} = \dfrac{29}{36} - \dfrac{2}{3n} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)}$.

3. Ça c'est facile, les trois termes dépendant de n tendent évidemment vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{29}{36}$. Pour les plus curieux, $S_2 = \dfrac{3}{8} = 0.375$, $S_3 = \dfrac{61}{120} \simeq 0.508$, $S_4 = \dfrac{26}{45} \simeq 0.578$, $S_5 = \dfrac{391}{630} \simeq 0.621$, et $\dfrac{29}{36} \simeq 0.806$, la convergence n'est pas aussi rapide qu'on pourrait l'imaginer.

4. On utilise bien entendu la décomposition calculée à la première question, avant de bien faire attention à mettre des expressions positives dans les ln en intégrant (même si ici le risque est assez faible) : $\int_2^4 \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int_2^4 -\frac{1}{2x}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}\,dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2}+\frac{2\ln(x-1)}{3}-\frac{\ln(x+2)}{6}\right]_2^4 = -\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{2}{3}\ln(3)-\frac{1}{6}\ln(6)+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{6}\ln(4) = -\ln(2)+\frac{2}{3}\ln(3)-\frac{1}{6}\ln(2)-\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{3}\ln(2) = -\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)$.

5. On va donc démontrer par récurrence la formule $S_n = \frac{29}{36}-\frac{2}{3n}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}$. La logique voulant qu'on initiale pour $n=2$, calculons donc $S_2 = \frac{3}{8+4-4} = \frac{3}{8}$, et le membre de droite $\frac{29}{36}-\frac{1}{3}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24} = \frac{58-24-4-3}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$, la propriété est donc vérifiée au rang 2. Supposons-là désormais vraie au rang n, alors $S_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k+1}{k^3+k^2-2k} = S_n + \frac{n+2}{(n+1)^3+(n+1)^2-2(n+1)}$. Mais on sait déjà que cette dernière fraction est égale à $-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{2}{3n}-\frac{1}{6(n+3)}$ (en effet il suffit d'appliquer la décomposition en éléments simples calculée à la première question pour $k=n+1$). On peut donc simplement écrire, en exploitant l'hypothèse de récurrence, que $S_{n+1} = \frac{29}{36}-\frac{2}{3n}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{2}{3n}-\frac{1}{6(n+3)} = \frac{29}{36}-\frac{2}{3(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}$, ce qui correspond exactement à la formule souhaitée au rang $n+1$. L'hérédité est donc vérifiée, et la propriété démontrée pour tout entier $n \geqslant 2$.

Problème : autour d'inégalités célèbres

1. (a) Il suffit de développer pour constater qu'on a un polynôme de degré 2, à condition toutefois que le coefficient devant x^2 ne puisse pas être nul. Comme il est égal à $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ qui est manifestement strictement positif, aucun risque, on a bien du « vrai » degré 2.

   (b) Avec les notations habituelles pour les coefficients d'un trinôme, on a ici $a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $b = 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ et $c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, donc $\Delta = 4(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Comme $f(x)$ est toujours positif (c'est une somme de carrés !), il ne peut pas y avoir deux racines distinctes pour f, donc $\Delta \leqslant 0$.

   (c) Quitte à simplifier par 4, $\Delta \leqslant 0$ signifie que $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Tout est positif partout avec les hypothèses faites sur les réels a_k et b_k, on peut donc tout passer à la racine carrée pour obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

   (d) L'égalité est évidente si $a_k = b_k$ puisque la somme de droite est alors égale à $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$, exactement la même chose que ce qui se trouve sous chacune des racines carrées du membre de droite. Mais si cette condition est suffisante pour assurer l'égalité, elle n'est en fait pas nécessaire. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz si le discriminant Δ calculé plus haut est nul, ce qui sera le cas si f s'annule exactement une fois. Notons x la valeur d'annulation correspondante, on doit alors avoir $x = -\frac{b_k}{a_k}$ pour tout entier k compris entre 1 et n pour que la somme de termes positifs constituant $f(x)$ puisse être égale à 0 (chaque carré doit être nul). Ceci n'est évidemment possible que si toutes les valeurs $\frac{b_k}{a_k}$ sont identiques, condition nécessaire et suffisante pour avoir notre égalité (on verra plus tard dans l'année que l'inégalité de Cauchy-Schwartz a une inetrprétation géométrique dans ce qu'on appelle les espaces vectoriels euclidiens ; la condition d'égalité signifie alors simplement que les vecteurs $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sont des vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^n$).

2. (a) On va en fait montrer que, pour tout indice k, l'inégalité $a_k^2 + mMb_k^2 \leqslant (m+M)a_kb_k$, il suffira ensuite d'additionner toutes ces inégalités pour obtenir celle demandée par l'énoncé. Factorisons notre inégalité par a_kb_k (toujours supposé strictement positif) pour obtenir $\frac{a_k}{b_k} + mM\frac{b_k}{a_k} \leqslant m+M$. Posons alors $x = \frac{a_k}{b_k}$. Par définition des réels m et M, on a nécessairement $m \leqslant x \leqslant M$, et on cherche donc à prouver que $x + \frac{mM}{x} \leqslant m+M$. Posons donc $f(x) = x + \frac{mM}{x}$, la fonction f est certainement définie et dérivable sur l'intervalle $[m, M]$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{mM}{x^2} = \frac{x^2 - mM}{x^2}$. Cette dérivée s'annule (sur $]0, +\infty[$) en $x = \sqrt{mM}$, qui appartient bien à l'intervalle $[m, M]$ (il suffit de comparer les carrés), la fonction f est donc décroissante sur $[m, \sqrt{mM}]$ puis croissante sur $[\sqrt{mM}, M]$. Or, $f(m) = f(M) = m + M$, ce qui suffit donc à prouver que $\forall x \in [m, M]$, $f(x) \leqslant m + M$. Ça tombe bien, c'est exactement ce qu'on souhait démontrer.

(b) Une question beaucoup plus rapide à traiter : $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$.

(c) Posons donc brutalement $x = \sum_{k=1}^n a_k^2$ et $y = mM\sum_{k=1}^n b_k^2$, alors d'après la question précédente $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$, soit $\sqrt{mM}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + mM\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$. On divise tout par $\sqrt{mM}$ et on enchaîne avec l'inégalité de la question a et on a exactement $\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}}\sum_{k=1}^n a_kb_k$.

3. (a) On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz en posant $a_i = \sqrt{c_i}$ (les réels c_i étant supposés strictement positifs, on peut le faire et on obtiendra des a_i eux-même strictement positifs) et $b_i = \frac{i}{\sqrt{c_i}}$ (tous ces nombres seront également strictement positifs). En élevant l'inégalité de Cauchy-Schwartz au carré, son membre de droite est alors égal à $\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 = \sum_{i=1}^k c_i \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{c_i}$, et le membre de gauche de cette même inégalité (toujours élevée au carré) vaut $(\sum_{i=1^n} a_ib_i)^2 = (\sum_{i=1}^n i)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ en appliquant la formule du cours pour la somme des entiers inférieurs ou égaux à k.

(b) On vient de prouver que $\forall k \leqslant n$, $\sum_{i=1}^k c_i \geqslant \frac{k^2(k+1)^2}{4\sum_{i=1}^k \frac{i^2}{c_i}}$. Tout cela étant strictement positif, on peut le passer à l'inverse : $\frac{1}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant \frac{4\sum_{i=1}^k \frac{i^2}{c_i}}{k^2(k+1)^2}$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{k}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{4\sum_{i=1}^k \frac{i^2}{c_i}}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \frac{4i^2}{k(k+1)^2 c_i}$. Il suffit en fait d'inverser les deux sommes dans la somme double obtenue à droite pour trouver exactement le membre de droite demandé dans l'énoncé : on a $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, donc en écrivant la somme double dans l'autre sens, i variera bien entre 1 et n, et k entre i et n. On peut bien sûr sortir les termes $\frac{i}{c_i}$ de la somme intérieure indicée par k, et la constante 4 des deux sommes.

(c) Calculons simplement la différence $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2 - 2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2}$, qui est manifestement un nombre positif.

(d) On majore terme par terme : $\sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=i}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{2i^2}$ (on a simplement fait apparaitre une somme télescopique très classique).

(e) On majore simplement le membre de droite de l'inégalité de la question b en exploitant la question précédente par $4\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{c_i} \times \frac{1}{2i^2} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$. Le nom de la variable muette indiçant la somme n'ayant aucune importance, on obtient bien le résultat souhaité.

(f) Supposons donc que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, on trouve alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{kc} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{c}$, soit $\frac{n}{c} \leqslant \frac{2n}{c}$, une inégalité qui est certes vraie mais pas franchement extraordinaire.

(g) Faisons donc ce qu'on nous demande et posons $c_k = k$, alors le membre de gauche de l'inégalité de Hardy est égal à $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$. Le membre de droite, lui, est simplement égal à $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Notons donc $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, notre membre de droite est donc égal à $2u_n$ et celui de gauche à $2u_n + \frac{2}{n+1} - 2$. Le quotient des deux est donc égal à $1 + \frac{1}{(n+1)u_n} - \frac{1}{u_n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ en exploitant la limite donnée par l'énoncé. On ne peut donc pas obtenir une constante plus petite que 2 dans le membre de droite de l'inégalité de Hardy (sinon le quotient finirait par devenir supérieur à 1 et l'inégalité serait donc fausse !).

Exercice bonus

Puisqu'on ne nous a donné aucun indice, essayons déjà de voir ce que vaut cette drôle de somme pour de petites valeurs de n. Pour $n = 0$, la somme S_0 ne contient qu'un seul terme, qui vaut $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0} = 1$. Bon, essayons avec $n = 1$, la somme a cette fois deux termes : $S_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k}\binom{k}{1} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 = 1$. Encore ? Vérifions pour $n = 2$, trois termes à calculer : $S_2 = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{2^k}\binom{k}{2} = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{16} \times 6 = 1$. Là, on commence à se douter de quelque chose. Allez, une dernière pour la route, on ne sait jamais, testons $n = 3$: $S_3 = \sum_{k=3}^{6} \frac{1}{2^k}\binom{k}{3} = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{32} \times 10 + \frac{1}{64} \times 20 = 1$ (je vous épargne le détail du calcul des coefficients binômiaux utilisés, refaites un petit triangle de Pascal si besoin). On conjecture brillamment que, $\forall n \geqslant 0$, $S_n = 1$. Il ne reste plus qu'à le prouver.

On va effectuer une sorte de démonstration par récurrence. L'initialisation a largement été faite ci-dessus, mais avant de commencer l'hérédité, écrivons S_n un peu différemment : $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+k}}\binom{n}{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+k}}\binom{k+n}{k}$ en appliquand successivement un changement d'indice (décalage de n unités de l'indice) puis la symétrie des coefficients binômieux qui assure que $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{(n+k)-n} = \binom{n+k}{k}$. En partant de cette nouvelle formule, esssayons de calculer $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+1+k}{k}$. On va commencer par appliquer la relation de Pascal pour écrire $\binom{n+1+k}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1}$, donc $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+k}{k-1}$ (on a fait partir la deuxième somme de $k = 1$ puisque le terme numéro 0 y est nul). La première somme n'est autre que S_n, à un facteur $\frac{1}{2}$ près et à un terme numéro $n+1$ près également. Plus précisément, elle vaut donc $\frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2^{2n+2}\binom{2n+1}{n+1}}$. Pour la deuxième somme, décalons les indices pour la transformer en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+2+k}} \binom{n+k+1}{k}$. Cette fois-ci, est S_{n+1} qu'on reconnait, à un facteur $\dfrac{1}{2}$ et à un terme manquant près. La deuxième somme est égale à $\dfrac{1}{2}S_{n+1} - \dfrac{1}{2^{2n+3}}\dbinom{2n+2}{n+1}$. Or, on peut remarquer, en utilisant à nouveau la relation de Pascal, que $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dbinom{n+1}{2n+1} + \dbinom{2n+1}{n} = 2 \times \dbinom{2n+1}{n+1}$ (la symétrie des coefficients binômiaux fait que les deux termes additionnés sont égaux). Cela revient exactement à dire que le terme ajouté à la somme de gauche est égal à celui retranché dans la somme de droite, et donc que $S_{n+1} = \dfrac{1}{2}S_n + \dfrac{1}{2}S_{n+1}$. Autrement dit, $S_{n+1} = S_n$, la suite (S_n) est donc constante, égale à 1 au vu des premières valeurs calculées plus haut.