Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 8 novembre 2021

Exercice

On souhaite calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k^3+k^2-2k}$.

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{k+1}{k^3+k^2-2k}$.
2. En déduire la valeur de S_n à l'aide d'un télescopage.
3. Quelle est la limite de (S_n) quand n tend vers $+\infty$?
4. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^4 \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\, dx$.
5. Redémontrer la formule obtenue pour S_n à la question 2 par récurrence (on évitera de prendre une formule où tout a été mis au même dénominateur si on ne veut pas se lancer dans une hérédité particulièrement pénible).

Problème : autour d'inégalités célèbres

1. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux listes constituées de réels qui sont tous strictement positifs.
   (a) En posant $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$, expliquer pourquoi f est un polynôme de degré 2.
   (b) Calculer le discriminant du polynôme précédent. Que peut-on dire de son signe ?
   (c) En déduire l'**inégalité de Cauchy-Schwartz** : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$
   (d) Vérifier que l'inégalité est en fait une égalité si $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b_k = a_k$. Déterminer ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Cauchy-Schwartz soit une égalité.
2. On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on pose $m = \displaystyle\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{b_k}$ et $M = \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{b_k}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + mM \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant (m+M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
   (b) Montrer que, si x et y sont deux réels positifs, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

(c) En déduire que $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ (sorte de « retournement » de l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

3. On ne considère maintenant plus qu'une série de réels strictement positifs $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

   (a) Montrer que, si $k \leqslant n$, on a $\sum_{i=1}^{k} c_i \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{c_i} \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ (on a bien sûr le droit d'utiliser les questions précédentes).

   (b) En déduire l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{c_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}$.

   (c) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

   (d) En déduire que $\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2i^2}$.

   (e) Conclure en démontrant l'**inégalité de Hardy** : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{c_1 + c_2 + \cdots + c_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$.

   (f) Que donne cette inégalité lorsque tous les nombres c_i sont égaux ?

   (g) En admettant que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, montrer qu'on ne peut pas obtenir une meilleure constante que le 2 à droite de l'inégalité de Hardy (on pourra poser $c_k = k$ et regarder ce qui se passe quand on fait grandir la valeur de n).

Exercice bonus

Déterminer la valeur de $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} \binom{k}{n}$.