Devoir Maison n^{o} 3 : corrigé

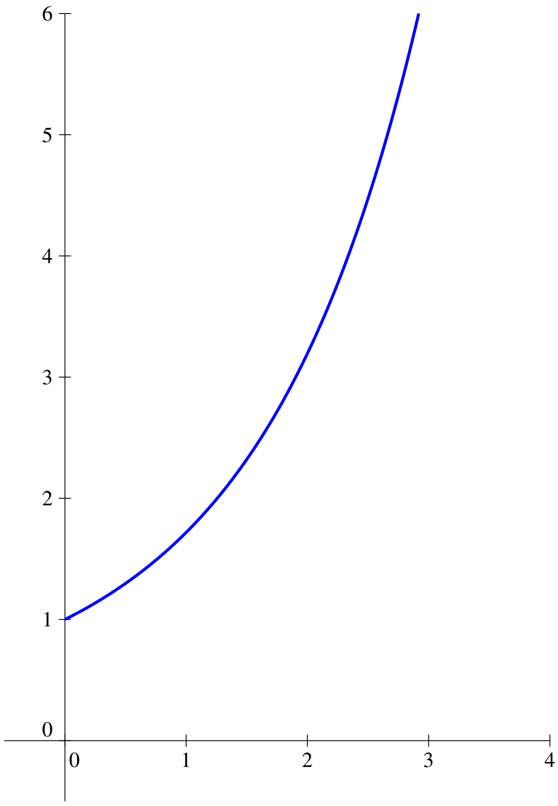
MPSI Lycée Camille Jullian

18 octobre 2021

Problème

A. Étude de la fonction f_0.

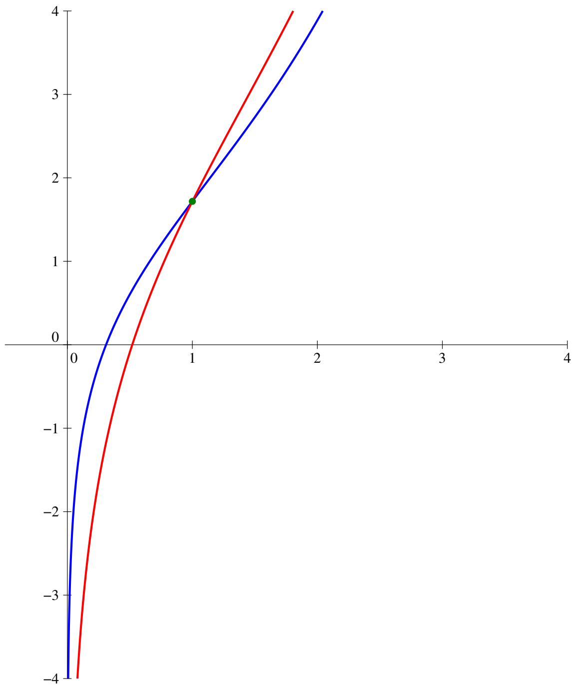
1. La convexité de la fonction exponentielle permet d'affirmer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$ (la droite d'équation $y = x+1$ étant tangente à la courbe de l'exponentielle). On peut appliquer cette inégalité au réel $-x$ pour obtenir $e^{-x} \geqslant 1-x$, soit $e^{-x}+x-1 \geqslant 0$. En multipliant tout par le réel positif e^x, on trouvé immédiatement la deuxième inégalité demandé : $1+(x-1)e^x \geqslant 0$.
2. On a simplement $f_0(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (limite de taux d'accroissement), donc $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = 1$. De l'autre côté, on écrit $f_0(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$ et on exploite la croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$.
3. La fonction f_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_0'(x) = \dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2} = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$. Comme on a prouvé à la première question que le numérateur de ce quotient était toujours positif, la fonction f_0 est tout simplement strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
4. Pour pouvoir tracer une allure intéressante, il faudrait au moins être capable de déterminer la direction de la courbe du côté de 0 (par exemple savoir s'il y a une tangente une fois qu'on a prolongé par continuité en rajoutant la valeur 1 correspondant à la limite en 0). Malheureusement, le calcul de $\lim\limits_{x\to 0} f_0'(x)$ dépasse nos capacités actuelles (je peux vous affirmer que cette limite existe et vaut $\dfrac{1}{2}$, mais on ne pourra le prouver qu'une fois les développements limités étudiés). En attendant, difficile de faire mieux qu'un truc extrêmement imprécis.



B. Étude de la famille de fonctions (f_n).

1. On a vu plus haut que la fonction f_0 était strictement croissante, comme la fonction $x \mapsto n\ln(x)$ l'est également, toutes les fonctions f_n sont sommes de fonctions croissantes, et donc strictement croissantes sur $]0,+\infty[$.
2. De façon évidente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, et le calcul de la limite de f_0 en 0 effectué dans la première partie permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. On a simplement $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x)$, donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et en-dessous sur l'intervalle $]0,1[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $(1, e-1)$ puisque $f_n(1) = e-1$.
4. La fonction f_1 est continue et strictement croissante, donc bijective de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule une seule fois.
5. Comme $f_1(1) = e-1 > 0$, la valeur d'annulation α_1 appartient nécessairement à l'intervalle $]0,1[$. Les positions relatives obtenues pour les fifférentes courbes sur cet intervalle assurent alors que $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1) = 0$. L'annulation de la fonction f_n découle de la bijectivité de cette dernière, et comme $f_n(\alpha_1) < 0 < f_n(0)$, la stricte croissance de la fonction f_n permet d'affirmer que $\alpha_1 < \alpha_n < 1$.
6. La fonction f_0 étant croissante, $\forall x \in]0,1]$, $f_0(x) \leqslant f_0(1)$, soit $\dfrac{e^x-1}{x} \leqslant e-1$. Par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$, donc $\dfrac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln(\alpha_n) = 0$, ce qu'on peut écrire $n\ln(\alpha_n) = \dfrac{1-e^{\alpha_n}}{\alpha_n}$. En appliquant l'inégalité obtenue juste avant, on a donc $n\ln(\alpha_n) \geqslant 1-e$, soit $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-e}{n}$.
7. La majoration $\alpha_n \leqslant 1$ implique que $\ln(\alpha_n) \leqslant 0$. Combinée à la minoration de la question précédente, on a donc $\dfrac{1-e}{n} \leqslant \ln(\alpha_n) \leqslant 0$. Une simple application du théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = e^0 = 1$.

8. Là encore, il n'y a pas grand chose de passionnant à tracer...



C. Un peu de calcul d'intégrales.

1. Sur l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, on sait que $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$, donc $I_n \leqslant I_{n+1}$ (on a le droit d'intégrer des inégalités sur un intervalle). Autrement dit, la suite (I_n) est croissante.
2. Il suffit de constater que $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(t) - f_n(t)\ dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t)\ dt$ est constant pour en déduire que la suite (I_n) est une suite arithémtique. On peut même calculer la valeur de la raison : $\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t)\ dt = [t\ln(t) - t]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - 0 + 1 = \frac{3\ln(3) - 3\ln(2) - 1}{2}$ (c'est très proche de 0).