Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 18 octobre 2021

Problème

Pour tout entier naturel n, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln(x)$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

A. Étude de la fonction f_0.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$, et en déduire que $1 + (x-1)e^x \geqslant 0$.
2. Déterminer les limites de la fonction f_0 aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier les variations de la fonction f_0.
4. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_0$.

B. Étude de la famille de fonctions (f_n).

1. Déterminer le sens de variation des fonctions f_n.
2. Déterminer les limites des fonctions f_n aux bornes de leur ensemble de définition.
3. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. On précisera en particulier les coordonnées d'un point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Montrer que la fonction f_1 s'annule en un unique réel qu'on notera α_1.
5. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier $n > 1$, puis que la fonction f_n s'annule en un unique réel α_n vérifiant $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$.
6. Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1$. En déduire que $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-e}{n}$.
7. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (α_n).
8. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

C. Un peu de calcul d'intégrales.

On note désormais $I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_n(t)\, dt$.

1. Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ?
2. La suite (I_n) est en fait une suite d'un type bien connu. Préciser lequel.