Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

30 septembre 2021

I. Étude d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.

1. Vérifions donc les trois propriétés habituelles :

   - un couple (a, b) est en relation avec lui-même puisqu'il vérifie la deuxième possibilité de la définition : $a = a$ et $b \geqslant b$. La relation est donc réflexive.
   - si $(a, b)L(c, d)$ et $(c, d)L(a, b)$, on a nécessairement $a = c$ (on ne peut avoir $a < c$ et en même temps $c < a$ ou $c = a$), donc $b \leqslant d$ et en même temps $d \leqslant b$ pour avoir la relation dans les deux sens, donc on a bien $(a, b) = (c, d)$, ce qui prouve l'antisymétrie de la relation.
   - si $(a, b)L(c, d)$ et $(c, d)L(e, f)$, il faut distinguer plusieurs cas : soit $a < c < e$, ce qui implique $a < e$ et donc $(a, b)L(e, f)$; soit $a = c < e$ ou $a < c = e$ et on conclut de la même façon ; soit enfin $a = c = e$ mais dans ce cas $b \leqslant d \leqslant f$, ce qui assure également que $(a, b)L(e, f)$. Dans tous les cas, la transitivité de la relation est prouvée.

   La relation L est donc bien une relation d'ordre. De plus, si on considère deux couples (a, b) et (c, d), on peut toujours les comparer : si $a \neq c$, on aura toujours $a < c$ ou $c < a$, donc $(a, b)L(c, d)$ ou $(c, d)L(a, b)$. Et si $a = c$, on a nécessairement $b \leqslant d$ ou $d \leqslant b$ pour conclure de même. La relation est bien totale (c'est le principe de l'ordre alphabétique, heureusement qu'il s'agit d'un ordre total, sinon on ne pourrait pas créer de dictionnaires !).

2. C'est évidemment le couple $(0, 0)$ qui est minimal : pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a soit $a > 0$ et donc $(0, 0)L(a, b)$, soit $a = 0$ mais $b \geqslant 0$, donc on a tout de même $(0, 0)L(a, b)$.

3. Supposons donc qu'il y ait un maximum de la forme (a, b). Ce couple est manifestement en relation avec le couple $(a + 1, 0)$ dans le « mauvais » sens, et ne peut en fait pas être un maximum.

4. (a) Par exemple, $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ convient (on a l'embarras du choix, n'importe quel élément de la forme $(2, b)$ pouvant convenir, et d'autres choix étant encore disponibles).

   (b) La transivité de la relation d'ordre impose que la condition xLy soit nécessaire. Elle est également suffisante puisque, si elle est vérifiée, la chaîne x, y répond manifestement au problème.

   (c) Cela découle de la question précédente et du fait que $(0, 0)$ soit le minimum de $\mathbb{N}^2$ pour la relation. Alternativement, la chaîne $(0, 0), y$ convient clairement.

5. Soit $y = (c, d)$ un élément de $\mathbb{N}^2$.

   (a) Si $c > 0$, de telles chaînes n'ont pas une longueur majorée, car on peut créer la chaîne $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, n), y$ pour n'importe quel valeur de l'entier n. Par contre, si $y = (0, d)$, on ne peut pas créer de chaîne de longueur supérieure à $d + 1$: en effet, il est impossible d'insérer dans la chaîne des éléments de la forme (O, n) avec $n > d$, ou de la forme (c, n) avec $c \neq 0$ puisque tous ces éléments sont « supérieurs » au couple $(0, d)$. Les seuls éléments possibles sont donc les couples $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, d)$, soit $d+1$ éléments au maximum dans la chaîne.

(b) On a en fait déjà répondu à la question : la chaîne $(0,0),(0,1),\dots,(0,d)$ est valable et de longueur maximale $d+1$. C'est la seule à avoir cette longueur puisqu'elle contient tous les éléments possibles dans une telle chaîne (et qu'on ne peut bien sûr pas les placer dans un autre ordre).

(c) La tête de la chaîne $(0,0)$ est imposée, la queue $(0,d)$ également. Entre les deux, il faut choisir pour chaque élément de la forme $(0,n)$, avec $n \in \{1,2,\dots,d-1\}$ si on le place dans la chaîne ou non. Il y a deux possibilités pour chaque élément, soit 2^{d-1} chaînes possibles au total. Par exemple, pour $d=3$, les quatre chaînes possibles sont $(0,0),(0,3)$ (chaîne de longueur minimale), $(0,0),(0,1),(0,3)$, $(0,0),(0,2),(0,3)$ et $(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)$ (chaîne de longueur maximale $d+1$).

6. L'énoncé n'est pas tout à fait exact car la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans les cas particuliers où $y=(0,0)$ (aucune chaîne possible), $y=(0,1)$ (une seule chaîne possible) et $y=(0,2)$ (deux chaînes possibles de longueur différente). Dans tous les autres cas, on peut facilement créer deux chaînes de même longueur mais différentes, qui contredisent donc le critère d'antisymétrie de la relation. Par exemple, les chaînes $(0,0),(0,1),y$ et $(0,0),(0,2),y$ conviennent toutes les deux.

II. Une deuxième relation sur $\mathbb{N}^2$.

1. C'est très similaire à ce qu'on a fait pour la relation L :

   - un couple (a,b) est en relation avec lui-même puisqu'il vérifie la deuxième possibilité de la définition : $a+b=a+b$ et $b \geqslant b$. La relation est donc réflexive.
   - si $(a,b)G(c,d)$ et $(c,d)G(a,b)$, on a nécessairement $a+b=c+d$, donc $b \leqslant d$ et en même temps $d \leqslant b$ pour avoir la relation dans les deux sens, donc on a bien $(a,b)=(c,d)$, ce qui prouve l'antisymétrie de la relation.
   - si $(a,b)G(c,d)$ et $(c,d)G(e,f)$, il faut distinguer plusieurs cas : soit $a+b<c+d<e+f$ (avec une égalité possible parmi les deux), ce qui implique $a+b<e+f$ et donc $(a,b)G(e,f)$; soit $a+b=c+b=e+f$ mais dans ce cas $b \leqslant d \leqslant f$, ce qui assure également que $(a,b)G(e,f)$. Dans tous les cas, la transitivité de la relation est prouvée.

   La relation G est donc bien une relation d'ordre. De plus, si on considère deux couples (a,b) et (c,d), on peut toujours les comparer : si $a+b \neq c+d$, on aura toujours $a+b<c+d$ ou $c+d<a+b$, donc $(a,b)G(c,d)$ ou $(c,d)G(a,b)$. Et si $a=c$, on a nécessairement $b \leqslant d$ ou $d \leqslant b$ pour conclure de même. La relation est bien totale (et vive le copier-coller).

2. C'est toujours le couple $(0,0)$ qui sera minimal, de façon totalement évidente.

3. C'est à peine plus dur que la question précédente : pour que le couple (a,b) soit minimal dans $\mathbb{N}^{2*}$, il doit avoir une valeur de $a+b$ minimale, c'est-à-dire égale à 1. Les deux candidats sont donc $(0,1)$ et $(1,0)$, parmi les lesquels $(1,0)$ est le plus « petit » pour la relation G, c'est donc lui le minimum (tous les couples (a,b) pour lesquels $a+b \geqslant 2$ étant plus grands à la fois que $(1,0)$ et que $(0,1)$).

4. (a) Déjà, l'ensemble n'est pas vide puisqu'on peut toujours créer une chaîne de longueur 2 convenable, la chaîne (x,y). Par ailleurs, une chaîne ayant $y=(c,d)$ pour queue ne peut contenir que des couples (e,f) vérifiant $e+f \leqslant c+d$. Il y a donc un nombre fini de valeurs de $e+f$ possibles, et une fois cette valeur fixée (notons-là n), seulement un nombre fini de couples vérifiant $e+f=n$ (il y en a même exactement $n+1$: $(n,0)$, $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $\dots$, $(0,n)$). Cela fait un nombre fini de couples pouvant appartenir à la chaîne, dont la longueur est nécessairement majorée par ce nombre d'éléments.

   (b) La relation étant totale, il suffit de mettre dans la chaîne tous les éléments décrits à la question précédente (dans le bon ordre, bien entendu), pour obtenir une chaîne de longueur maximale.

(c) Notons $p = a+b$ et $n = c+d$. Tous les couples (e, f) vérifiant $p < e+f < n$ sont « compris entre » x et y au sens de la relation G et peuvent donc être inclus dans la chaîne. D'après ce qui a été dit à la question a, il y en a exactement $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n-1} k+1$. Si vous ne connaissez pas les formules permettant de calculer cette somme, tenez-vous en à cette formule, mais sachez qu'elle vaut $\dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{p(p+1)}{2} + n - p - 1$. Il faut rajouter à tous ces éléments les éléments vérifiant $e+f = c+d$ et $f \leqslant d$, c'est-à-dire les couples $(n, 0)$, $(n-1, 1)$, ..., $(n-d, d)$ (ce dernier n'est autre que (c, d), c'est-à-dire y), qui sont au nombre de $d+1$. Enfin, en début de chaîne, on pourra mettre les couples vérifiant $e+f = p$ et $d \leqslant f$, donc les couples $(p-b, b)$, $(p-b-1, b+1)$, ..., $(0, p)$, qui sont au nombre de $p-b+1$. Finalement, on obtient la sublime formule $\alpha = \dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{p(p+1)}{2} + n - p - 1 + d + 1 + p - b + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{p(p+1)}{2} + n + d - b + 1$.

Un exemple concret : si $x = (1, 2)$ et $y = (3, 4)$, on a $n = 7$ et $p = 3$, donc $\alpha = 21-6+7+4-2+1 = 25$. En effet, la chaîne correspondante est $(1, 2), (0, 3), (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), (5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5), (6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6), (7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4)$, qui est de longueur 25.

(d) Question complètement débile pour terminer : il ne peut y en avoir qu'une seule, il faut mettre tous les éléments précédemment décrits, et on n'a aucun choix pour l'ordre.