Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 2

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 30 septembre 2021

Ce problème est celui qui constituait la deuxième partie du premier DS de maths que j'ai eu l'occasion de faire en tant qu'élève de MPSI il y a, euh, trop longtemps.

I. Étude d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.

On désigne par L la relation binaire définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)L(c,d)$ si $a < c$ ou ($a = c$ et $b \leqslant d$). Cette relation est connue sous le nom d'ordre lexicographique (pour des raisons qui devraient vous sembler évidentes).

1. Vérifier que L est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$, et que cet ordre est total.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ possède un minimum pour la relation L.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ ne possède pas de maximum pour la relation L.
4. On appelle chaîne de $\mathbb{N}^2$ toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $x_1 L x_2$, $x_2 L x_3$, …, $x_{p-1} L x_p$. L'entier p est appelé longueur de la chaîne, x_1 est la tête de la chaîne et x_p la queue de la chaîne.
   (a) Construire une chaîne de longueur 3 ayant $(1,2)$ pour tête et $(3,4)$ pour queue.
   (b) Soient $x = (a,b)$ et $y = (c,d)$ deux élements de $\mathbb{N}^2$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une chaîne ayant x pour tête et y pour queue.
   (c) Montrer que, $\forall y \in \mathbb{N}^2$, il existe une chaîne ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue.
5. Soit $y = (c,d)$ un élément de $\mathbb{N}^2$.
   (a) Déterminer à quelle condition sur y les longueurs des chaînes admettant $(0,0)$ comme tête et (c,d) comme queue sont majorées par une constante dépendant uniquement de y.
   (b) Dans ce cas, déterminer la longueur maximale d'une telle chaîne. Existe-t-il une unique chaîne de longueur maximale ?
   (c) Calculer le nombre total de chaînes ayant $(0,0)$ pour tête et y pour queue quand ce nombre est fini.
6. On considère l'ensemble de toutes les chaînes admettant $(0,0)$ pour tête et $y = (c,d)$ pour queue, et on définit sur ces chaînes la relation $\mathcal{R}$ par $C\mathcal{R}C'$ (ici, C et C' désignent donc des chaînes) si et seulement si la longueur de C est inférieure ou égale à celle de C'.

   Montrer que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble sur lequel elle est définie.

II. Une deuxième relation sur $\mathbb{N}^2$.

On définit similairement à la première partie une relation G sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)G(c,d)$ si $a+b<c+d$ ou $(a+b=c+d$ et $b \leqslant d)$.

1. Montrer que G est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer le minimum de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ pour cette relation.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{2*} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b>0\}$ admet aussi un minimum à préciser pour cette relation.
4. On définit des chaînes pour la relation G de la même façon qu'on l'avait fait dans la première partie pour la relation L.
   (a) Montrer que, si xGy, avec $x=(a,b)$ et $y=(c,d)$, les longueurs des chaînes admettant x comme tête et y comme queue sont majorées.
   (b) Montrer qu'il existe une longueur maximale α pour de telles chaînes.
   (c) Exprimer α en fonction de a, b, c et d.
   (d) Déterminer le nombre de chaînes de longueur maximale ayant x pour tête et y pour queue.