# Devoir Maison n° 1 : corrigé

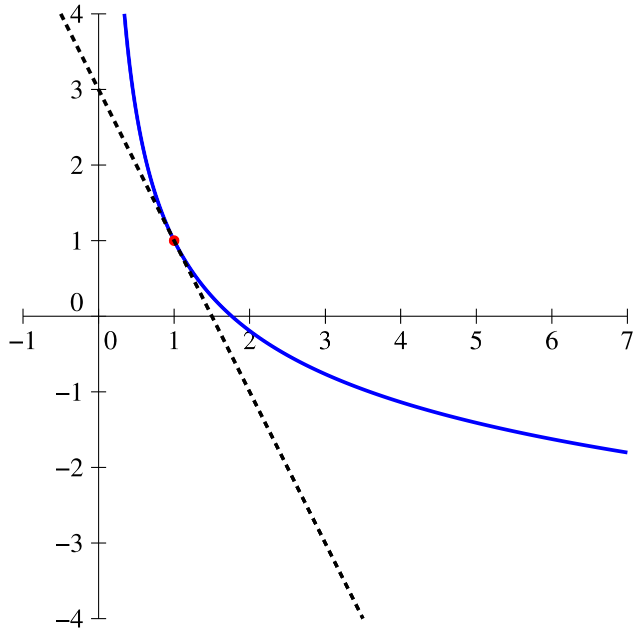
MPSI Lycée Camille Jullian

13 septembre 2021

## 1 Exercice 1 (d'après un vieux sujet de bac)

### A. Étude de la fonction $f$.

1. La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et $\forall x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1+x}{x^2}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. On pouvait aussi, plus simplement, affirmer directement que la fonction $f$ est décroissante comme différence d'une fonction décroissante sur $]0,+\infty[$ (la fonction inverse) et d'une fonction croissante (la fonction ln). La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Aucun problème non plus du côté de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Si on souhaite tracer une courbe pas trop imprécise, on peut facilement calculer $f(1) = 1$ pour indiquer ce point. Sur le graphique qui suit, on a également tracé la tangente $(D)$ étudiée à la question 3.




2. La fonction $f$ étant continue et strictement décroissante, elle est bijective sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'après les calculs de limites effectués précédemment. En particulier, 0 admet un unique antécédent par $f$, ce qui prouve bien que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique. De plus, $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2} - \ln(2) < 0$ (en effet, $\ln(2) \simeq 0.69 > \dfrac{1}{2}$), donc $f$ s'annule nécessairement sur l'intervalle $]1,2[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $x_0$ est l'unique valeur d'annulation de $f$, $x_0 \in ]1,2[$.

3. (a) On a déjà calculé plus haut $f(1) = 1$. De plus, $f'(1) = -2$, donc la tangente $(D)$ a pour équation $y = -2(x-1)+1 = -2x+3$.

   (b) Ce point d'intersection a nécessairement une ordonnée nulle, donc son abscisse véérifie $0 = -2x_1 + 3$, soit $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

   (c) Posons pour cela $h(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x) + 2x - 3$, et tentons d'étudier son signe. La fonction $h$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $h'(x) = f'(x) + 2 = -\dfrac{1+x}{x^2} + 2 = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$. Cette dérivée est du signe de $2x^2 - x - 1$, trinôme de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admettant deux racines réelles $x_a = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ (en-dehors du domaine de définition de $h$) et $x_b = \dfrac{1+3}{4} = 1$. La dérivée $h'$ est négative entre ses racines, donc $h$ est décroissante sur $]0, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $h(1) = 0$, la fonction $h$ ne prend que des valeurs positives, ce qui prouve que $\mathcal{C}_f$ est toujours située au-dessus de la tangente $(D)$.

   (d) Puisque $\mathcal{C}_f$ est toujours située au-dessus de $(D)$ et que le point de coordonnées $(x_1, 0)$ appartient à $(D)$, on a nécessairement $f(x_1) > 0$. On peut d'ailleurs le prouver directement : $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3} - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3} + \ln(2) - \ln(3)$. Si on sait que $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$, cela suffit à affirmer que $f(x_1) > 0$. Dans tous les cas, la stricte décroissance de la fonction $f$ prouve ensuite que $x_0 > x_1$.

4. L'IPP ne va servir qu'à calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,dt$, en posant $u(t) = \ln(t)$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, et $v'(t) = 1$ qu'on peut intégrer en $v(t) = t$. On obtient alors $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,dt = [t\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 1\,dt = 2\ln(2) - 1$, puis $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt - \int_1^2 \ln(t)\,dt = [\ln(t)]_1^2 - (2\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2)$.

## B. Recherche d'une valeur approchée de $x_0$.

1. Puisque l'énoncé n'a pas daigné préciser de domaine de définition, on va étudier $g$ sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée sur chacun de ces deux intervalles de la fonction exponentielle qui est croissante et de la fonction inverse qui est décroissante. On en déduit que $g\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) = \left[g(2), g\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$. Or, $g(2) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} > \dfrac{3}{2}$ car $e > \dfrac{9}{4}$ (on doit savoir que $e \simeq 2.7$, il y a de la marge), et $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$. On aimerait prouver que cette valeur est inférieure à 2, ce qui est le cas si $e^2 \leqslant 2^3 = 8$. C'est bien le cas, $e^2 \simeq 2.7^2 \simeq 7.3 < 8$.

2. Pour majorer la dérivée sur tout un intervalle, le mieux est de connaître ses variations. Pour cela, on dérive une seconde fois : $g'$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, puis $g''(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $g'$ y est croissante. Comme elle y est par ailleurs négative, on aura, $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$, $|g'(x)| \leqslant \left|g'\left(\dfrac{3}{2}\right)\right| = \dfrac{4e^{\frac{2}{3}}}{9}$. Difficile ici d'obtenir la majoration par $\dfrac{4}{9}$ sans utiliser de calculatrice.

3. (a) C'est une conséquence assez immédiate du résultat de la question 1, mais il faut même écrire une petite récurrence pour être rigoureux : l'initialisation est évidente puisque $u_0 = \dfrac{3}{2}$, et en supposant $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$, on aura $\dfrac{3}{2} \leqslant g(u_n) \leqslant 2$ d'après la question 1, c'est-à-dire exactement la propriété souhaitée au rang $n+1$.

(b) Il s'agit d'une recurrence classique. L'initialisation revient à prouver que $|u_0 - x_0| \leqslant 1$, Comme on a démontré dans la première partie du problème que $x_0 \in [1, 2]$, on sait même que $|u_0 - x_0| \leqslant \frac{1}{2}$, donc la propriété est certainement vraie au rang 0. Supposons là vrai au rang $n$, alors $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0.9|u_n - x_0| \leqslant 0.9 \times 0.9^n = 0.9^{n+1}$ en exploitant la formule donnée dans l'énoncé puis l'hypothèse de récurrence. La propriété est donc héréditaire, elle est vrai pour tout entier naturel $n$.

(c) Une valeur absolue étant toujours positive, on a en fait $0 \leqslant |u_n - x_0| \leqslant 0.9^n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.9^n = 0$ (suite géométrique de raison comprise entre $-1$ et 1), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_0| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$.

4. Effectuons une récurrence pour prouver la propriété $P_n$ : $x_0$ est situé entre $u_n$ et $u_{n+1}$. Constatons déjà que le réel $x_0$ vérifie $\ln(x_0) = \frac{1}{x_0}$, donc $x_0 = e^{\frac{1}{x_0}}$. Autrement dit, $x_0$ vérifie $g(x_0) = x_0$ (on dit qu'il s'agit d'un **point fixe** de la fonction $g$). Or, la fonction $g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, intervalle dans lequel se situent toujours $u_n$ et $x_0$. L'inégalité $u_0 \leqslant x_0$ implique alors $g(x_0) \leqslant g(u_0)$, c'est-à-dire $x_0 \leqslant u_1$, ce qui prouve la propriété $P_0$. C'est exactement le même principe au rang $n$ : si on a $u_n \leqslant x_0 \leqslant u_{n+1}$, la décroissance de $g$ assure que $u_{n+2} \leqslant x_0 \leqslant u_{n+1}$, et inversement si $u_{n+1} \leqslant x_0 \leqslant u_n$. Dans tous les cas, $x_0$ restera compris entre $u_n$ et $u_{n+1}$. Pour l'approximation numérique, calculatrice obligatoire : $u_0 = \frac{3}{2}$, $u_1 = e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.948$, $u_2 \simeq 1.671$, $u_3 \simeq 1.819$, $u_4 \simeq 1.732$ et enfin $u_5 \simeq 1.781$. La convergence n'est pas très rapide, mais on peut déjà affirmer que $x_0 \simeq 1.756$ est une valeur approchée correcte à 0.025 près.

# 2 Exercice 2

1. Prouvons l'égalité des deux ensembles par double inclusion. Supposons d'abord que $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Par hypothèse, soit $x \in A$, soit $x \in B$, et dans les deux cas $x \in A \cup B$. Par contre, $x$ ne peut pas appartenaire à la fois à $A$ et $B$ sinon il ne serait ni dans $A\backslash B$ (puisqu'il appartiendrait à $B$) ni dans $B\backslash A$ (symétriquement il appartiendrait à $A$). Donc $x \notin A \cap B$, et on a bien prouvé que $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Dans l'autre sens, supposons maintenant que $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Puisque $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$, et donc $x \in A\backslash B$. De même, si $x \in B$, alors $x \in B\backslash A$. Dans les deux cas, $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, et les deux ensembles sont donc bien égaux.

   Pour ceux qui préfèrent travailler directement sur les propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles : $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ (on a utilisé en cours de route les lois de Morgan et la distributivité de l'intersection par rapport à l'union).

2. C'est particulièrement pénible à faire à la main, mais on va essayer de décrire explicitement les éléments de ces ensembles en utilisant le résultat de la question précédente. Supposons pour commencer que $x \in (A\Delta B)\Delta C$. On a donc $x \in (A\Delta B) \cup C$, mais $x \notin (A\Delta B) \cap C$. Première possibilité : $x \in A\Delta B$ et $x \notin C$. Dans ce cas, on a soit $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$, soit $x \in B$, $x \notin A$ et $x \notin C$. Bref, $x$ appartient à exactement un ensemble parmi $A$, $B$ et $C$ (mais pas à $C$). Deuxième possibilité : $x \in C$ et $x \notin A\Delta B$. Là encore il y a deux choix possibles : $x \notin A \cup B$, auquel cas $x$ appartient à l'unique ensemble $C$ (le cas qui nous manquait tout à l'heure) ; soit $x \in A \cup B$, mais $x \in A \cap B$ pour ne pas être dans $A\Delta B$, ce qui revient à dire que $x \in A \cap B \cap C$. Si on résume on a prouvé que $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C)$. Si on échange le rôle des ensembles $A$, $B$ et $C$, cette dernière expression reste exactement la même, ce qui prouve que $A\Delta(B\Delta C)$ est le même ensemble.

   Autre possibilité pour avoir moins à réfléchir : une bonne vieille table de vérité fonctionne très bien.

3. Allons-y pour une démonstration à coup d'ensembles : $A\cap(B\Delta C) = A\cap(B\cup C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) = (A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$ (les deux autres ensembles de l'union étant vides). De l'autre côté, $(A\cap B)\Delta(A\cap C) = (A\cap B\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup(A\cap C\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))$, ce qui est bien la même chose puisqu'on peut supprimer les $\overline{A}$ dont l'intersection avec $A$ sera évidemment vide.
4. Parmi les multitudes d'exemples possibles : $A\cup(\emptyset\Delta A) = A\cup A = A$, mais $(A\cup\emptyset)\Delta(A\cup A) = A\Delta A = \emptyset$, les deux ensemble sont différents dès que $A$ est non vide.
5. Pour que $A\Delta B$ soit vide, il faut que $A\cap B = A\cup B$, ce qui ne peut être le cas que si $B = A$ (sinon, en reprenant l'autre définition, on doit avoir $A\backslash B = B\backslash A = \emptyset$, soit $A\subset B$ et $B\subset A$, et on conclut de même).
6. Cette fois, on doit avoir $A\cup B = E$ et $A\cap B = \emptyset$, ce qui impose $B = \overline{A}$ (les éléments de $B$ ne peuvent pas appartenir à $A$ car l'intersection est vide, et tout élément qui n'est pas dans $A$ doit être dans $B$ pour avoir une union égale à $E$).
7. Supposons donc $X\subset E$ fixé, et cherchons à construire un ensemble $B$ tel que $A\Delta B = X$ (donc un antécédent de $X$ par notre application). Soit $x\in X$. L'élément $x$ doit appartenir à $A\Delta B$. S'il appartient à $A$, il ne doit donc pas être dans $B$, et vice versa. Autrement dit, $B$ doit contenir l'ensemble $X\backslash A$, mais aucun autre élément de $X$. Prenons maintenant un élément $y$ n'appartenant **pas** à $X$, cette fois $y$ ne doit pas être dans $A\Delta B$. S'il est dans $A$, il doit donc être aussi dans $B$, mais s'il n'est pas dans $A$, il ne doit pas être dans $B$ non plus. Autrement dit, $B$ doit contenir $A\backslash X$, mais aucun autre élément de $\overline{X}$. Il n'y a donc qu'une possibilité : $B = (A\backslash X)\cup(X\backslash A)$, c'est-à-dire tout bêtement $B = A\Delta X$. Cet antécédent étant unique, l'application est bien bijective. Plus fort que ça, l'antécédent calculé n'est autre que l'image de $X$ par notre application, ce qui prouve que cette dernière est sa propre réciproque.

   C'est d'ailleurs une façon honteuse de résoudre cette question sans se fatiguer : en notant $f$ l'application, on écrit $f\circ f(B) = A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta B = B$, ce qui prouve que $f\circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$, et donc d'un seul coup que $f$ est bijective et que $f^{-1} = f$.