Devoir Maison n^o 15

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 14 juin 2022

A. Définition de la fonction Γ.

1. (a) L'inégalité à prouver est loin d'être triviale, puisque le facteur $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)$ est certes inférieur à $\ln\left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)$, mais ils sont négatifs tous les deux, donc on ne peut pas du tout se contenter de faire un produit d'inégalités. Posons plutôt $f(t) = n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) - (n+1)\ln\left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)$, n étant un entier fixé. La fonction f est définie et dérivable sur $[0,n[$, et $f'(t) = -\dfrac{1}{1-\frac{t}{n}} + \dfrac{1}{1-\frac{t}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+1-t} - \dfrac{n}{n-t} = \dfrac{(n+1)(n-t)-n(n+1-t)}{(n+1-t)(n-t)} = -\dfrac{t}{(n+1-t)(n-t)}$, qui est négatif sur l'intervalle $]0,n[$. La fonction f y est donc décroissante, et $f(0)=0$, ce qui prouve qu'on a toujours $f(t) \geqslant 0$, et donc que $n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant (n+1)\ln\left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)$.

   (b) Si t est un réel fixé dans $[0,n[$, la suite $\left(k\ln\left(1-\dfrac{t}{k}\right)\right)_{k\geqslant n}$ est une suite croissante. De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{t}{k} = 0$, donc $k\ln\left(1-\dfrac{t}{k}\right) \sim k\times\left(-\dfrac{t}{k}\right)$, qui a donc pour limite $-t$. On en déduit que, $\forall k \geqslant n$, $k\ln\left(1-\dfrac{t}{k}\right) \leqslant -t$, et en particulier (après passage à l'exponentielle) que $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$ sur l'intervalle $[0,n[$. On peut multiplier cette inégalité par le facteur positif t^{x-1} puis l'intégrer sur $[0,n[$ pour obtenir exactement $\Gamma_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

   (c) En notant g cette fonction, elle est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée $g'(t) = (x-1)t^{x-2}e^{-\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2}t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} = g(t)\left(\dfrac{x-1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, la dérivée est du signe de $2(x-1)-t$, donc la fonction g est croissante sur $[0,2x-2]$, puis décroissante sur $[2x-2,+\infty[$. Or, $g(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ (par croissance comparée classique), la fonction g est donc bornée par 0 et $g(2x-2)$ (qu'on n'a même pas besoin de s'embêter à calculer).

   (d) En reprenant l'inégalité obtenue à la première question, et après un passage à l'exponentielle, un produit par t^{x-1} et une intégration, on a $\Gamma_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)^{n+1}dt \leqslant \Gamma_{n+1}(x)$ (on ajoute l'intégrale de n à $n+1$ d'une fonction positive pour obtenir $\Gamma_{n+1}(x)$). La suite $(\Gamma_n(x))$ est donc croissante. Reste à prouver qu'elle est majorée (par une constante, bien entendu) pour en déduire sa convergence. D'après la question précédente, on peut majorer $t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$ par une certaine constante positive M. Reprenons alors la majoration de la question b : $\Gamma_n(x) \leqslant \int_0^n t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\,dt \leqslant M\int_0^n e^{-\frac{t}{2}}\,dt = M[-2e^{-\frac{t}{2}}]_0^n = M(2-2e^{-\frac{n}{2}}) \leqslant 2M$. Notre suite est donc bien croissante et majorée, elle converge nécessairement.

2. (a) On connait déjà les pôles de la fraction, qui peut donc s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{X+k}$. Pour calculer a_k, on effectue classiquement le produit par $X+k$ avant de poser $X = -k$: $a_k = \frac{n!}{-k(-k+1)\dots(-1)\times 1\dots(n-k)} = \frac{n!}{(-1)^k\times k!\times(n-k)!} = (-1)^k\binom{n}{k}$. Autrement dit, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{X+k} = \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$.

   (b) On peut faire un calcul barbare à coups de binôme de Newton : $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(\frac{t}{n}\right)^k\,dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n^k}\int_0^n t^{x-1+k}\,dt$ $= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n^k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n^x}{x+k}$. On peut enfin appliquer la résultat de la question précédente (le facteur n^x est indépendant de k et peut être sorti de la somme) pour trouver $\Gamma_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

   (c) On constate déjà que $\Gamma_n(x+1) = \frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)} = \frac{nx}{x+n+1}\Gamma_n(x)$. Dans la mesure où $\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{x+n+1} = x$, un simple passage à la limite donne alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Constatons que $\Gamma_n(1) = \frac{n!\times n}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}$, donc $\Gamma(1) = 1$. Ensuite, on prouve simplement par récurrence que $\Gamma(k) = (k-1)!$. C'est bien le cas pour $k = 1$, et si on le suppose vrai pour un entier $k \geqslant 1$, alors $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k\times(k-1)! = k!$, ce qui prouve l'hérédité.

3. (a) On constate bien entendu que les $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon}{k}$ qui apparaissent deux fois dans la formule demandée se simplifient, il suffit donc de prouver que $\ln(\Gamma(1+\varepsilon)) - \ln(\Gamma(1)) = \varepsilon\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)$. Or, après simplification des $n!$ et du $n^{1+\varepsilon}$ par n^x, $\frac{\Gamma_n(1+\varepsilon)}{\Gamma_n(1)} = \frac{n^\varepsilon\times 1\times 2\times\dots\times(1+n)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)\dots(n+1+\varepsilon)}$, donc $\ln(\Gamma_n(1+\varepsilon)) - \ln(\Gamma_n(1)) = \varepsilon\ln(n) + \sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(\frac{k}{k+\varepsilon}\right) = \varepsilon\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)$, ce qui est bien la formule demandée.

   (b) On sait que $\ln(1+u) \leqslant u$ (inégalité de convexité), on va donc étudier la fonction $u \mapsto \frac{u^2}{2} - u + \ln(1+u)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $u \mapsto u - 1 + \frac{1}{1+u} = \frac{u^2}{1+u} \geqslant 0$, donc elle est croissante. Comme elle s'annule en 0, l'inégalité demandée en découle.

   (c) En exploitant la question précédente (l'inégalité reste bien sûr vraie sans valeur absolue), $\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{k} - \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon^2}{2k^2} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}$. Là, soit on sait ce que vaut la somme de la série de Riemann $\sum\frac{1}{k^2}$ et on conclut facilement car $\frac{\pi^2}{6} < 2$, soit on fait les choses à la main en rappelant que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$. Dans tous les cas, on obtient bien une majoration par ε^2 (voire un peu moins).

(d) On sait que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ (dans le cours, on a évoqué ce résultat avec une somme qui ne va que jusqu'à l'indice n, mais le terme supplémentaire égal à $\frac{1}{n+1}$ peut sans problème être inclus dans le $o(1)$. On reprend alors le résultat de la question a, en majorant la deuxième partie à l'aide de la question c, et on obtient $\ln(\Gamma(1+\varepsilon)) = \ln(\Gamma(1)) - \gamma\varepsilon + o(\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$. Or, $\Gamma(1) = 1$, donc le terme $\ln(\Gamma(1))$ disparait. Il faudrait encore justifier rigoureusement que le $o(\varepsilon)$ qui traine est en fait un $O(\varepsilon^2)$, ce qui découle du développement asymptotique de la série harmonique dont $\ln(n) + \gamma$ constitue le début. Cette précision supplémentaire ne sert d'ailleurs à rien pour la conclusion suivante.

(e) En effet, on peut passer à l'exponentielle le résultat précédent : $\Gamma(1+\varepsilon) = e^{-\gamma\varepsilon + O(\varepsilon^2)} \underset{\varepsilon \to 0}{=} 1 - \gamma\varepsilon + o(\varepsilon)$, ce qui prouve l'existence d'un développement limité de la fonction Γ en 1 à l'ordre 1. La fonction y est donc dérivable, et on peut même affirmer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

B. Retour sur l'expression intégrale de la fonction Γ.

1. Commençons par poser $h(t) = e^t - (1+t) - \frac{t^2}{2}$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $h'(t) = e^t - 1 - t$, puis $h''(t) = e^t - 1$. La fonction h' est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$, admettant pour minimum $h'(0) = 0$. La fonction h est donc elle-même croissante sur $\mathbb{R}$, et vérifie $h(0) = 0$, elle est donc négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. En particulier, on peut en déduire que $e^{-\frac{t}{n}} - \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{2n^2}$ pour tout réel positif t et tout entier naturel $n \geqslant 1$. Posons maintenant $a = e^{-\frac{t}{n}}$ et $b = 1 - \frac{t}{n}$, les réels a et b sont tous les deux inférieurs ou égaux à 1 (avec l'hypothèse $t \in [0, n]$), donc $|b^n - a^n| = |b-a| \times \left| \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k} \right| \leqslant n|b-a|$ (chacun des termes de la somme est inéfieur ou égal à 1). On peut alors, en reprenant l'inégalité démontrée en début de question, que $\left| (e^{-\frac{t}{n}})^n - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leqslant n \times \left| e^{-\frac{t}{n}} - \left(1 - \frac{t}{n}\right) \right| \leqslant n \times \frac{t^2}{2n^2} = \frac{t^2}{2n}$ (la valeur absolue est anecdotique ici, tous les termes sont en fait positifs, comme on l'a déjà constaté dans la première partie du problème).
2. On peut appliquer la majoration de la question précédente (puisque $a \leqslant n$) puis multiplier par t^{x-1} pour obtenir $\left| \int_0^a t^{x-1} e^{-t}\, dt - \int_0^a t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \right| \leqslant \frac{1}{2n} \int_0^a t^{x+1}\, dt = \frac{1}{2n} \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} \right]_0^a = \frac{a^{x+2}}{2n(x+2)}$.
3. L'énoncé n'était pas extrêmement limpide, mais le but est bien sûr de trouver une constante M qui soit la même pour toutes les valeurs de a. On peut en fait reprendre les idées exploitées en fin de question A.1 : la fonction $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{-\frac{t}{2}}$ est bornée sur $[a, n]$ par une certaine constante M indépendante de n (dans la mesure où $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est de toute façon majoré par 1 sur notre intervalle, il suffit de reprendre comme valeur de M le majorant sur $[0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}$ obtenu dans la partie A). On peut alors écrire que

$\displaystyle\int_a^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ dt \leqslant M\int_a^n e^{-\frac{t}{2}}\ dt = 2M(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}) \leqslant 2Me^{-\frac{a}{2}}$ Bon, on change le nom de la constante pour faire disparaitre le facteur 2 et on aura bien répondu à la question.

4. On peut majorer à coups d'inégalité triangulaire : $\left|\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \Gamma(x)\right|$ $\leqslant \left|\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \Gamma_n(x)\right| + |\Gamma_n(x) - \Gamma(x)| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \int_0^a t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ dt\right| + \displaystyle\int_a^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ dt + |\Gamma_n(x)-\Gamma(x)| \leqslant \frac{a^{x+2}}{2n(n+2)} + Me^{-\frac{a}{2}} + |\Gamma_n(x)-\Gamma(x)|$. Les deux termes extrêmes ayant une limite nulle quand n tend vers $+\infty$, on peut les rendre tous les deux inférieurs ou égaux à un certain $\varepsilon > 0$ (et ce simultanément, il suffit de prendre le maximum des deux entiers à partir desquels chacune des deux majorations est vraie), ce qui donne donc $\left|\displaystyle\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \Gamma(x)\right| \leqslant Me^{-\frac{a}{2}} + 2\varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie quel que soit le réel strictement positif ε, on en déduit la majoration de l'énoncé.

5. La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ reste vraie pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1 (la démonstration est la même que celle effectuée dans la première partie), donc $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Or, on peut calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt$ en effectuant le changement de variable $t = u^2$, qui implique $dt = 2u\ du$ et change la borne supérieure de l'intégrale en $\sqrt{a}$. On obtient $\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{e^{-u^2}}{u}\times 2u\ du = 2\int_0^{\sqrt{a}} e^{-u^2}\ du \underset{a\to+\infty}{\to} \sqrt{\pi}$. On en déduit que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C. Prolongement de Γ à $]0,+\infty[$, propriétés supplémentaires.

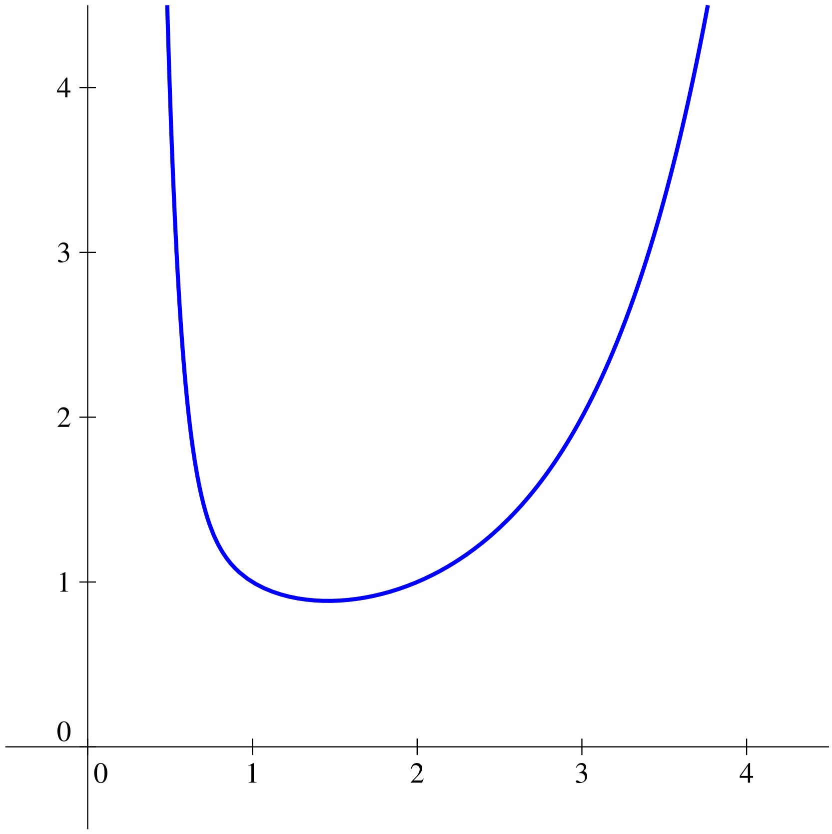
1. On commence par simplifier le quotient $\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} = \dfrac{(n+1)(n+1)^x}{n^x(x+n+1)}$. On peut alors en déduire que $\ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(\Gamma_n(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{x+n+1}\right)$. On exploite ensuite deux fois l'inégalité de convexité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour en déduire $\ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(\Gamma_n(x)) \leqslant \dfrac{x}{n} - \dfrac{x}{x+n+1} = \dfrac{x(x+1)}{n(x+n+1)} \leqslant \dfrac{x(x+1)}{n(n+1)}$. La positivité découle de la croissante sur la suite $(\Gamma_n(x))$ démontrée en début de problème.

2. On additionne les inégalités obtenues à la question précédente pour n variant entre 1 et $N-1$ pour obtenir, par télescopage, $0 \leqslant \Gamma_N(x) - \Gamma_1(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{x(x+1)}{n(n+1)}$, soit $0 \leqslant \Gamma_N(x) - \dfrac{1}{x(x+1)} \leqslant x(x+1)\left(1-\frac{1}{N}\right) \leqslant x(x+1)$. La suite $\ln(\Gamma_n(x))$ est donc croissante et majorée, elle converge nécessairement. Un simple passage à l'exponentielle assure alors également la convergence de $(\Gamma_n(x))$.

3. Il y avait bien sûr une erreur d'énoncé aberrante, il fallait lire $\left(\Gamma_n\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2$ et non pas un carré à l'intérieur du calcul de $Gamma_n$, qui rend la simplification impossible. Avec le bon énoncé, le quotient demandé se simplifie un peu : les $n!$ du numérateur disparaissent, els puissances de n de ce même numérateur aussi puisque $\dfrac{n^x \times n^y}{(n^{\frac{x+y}{2}})^2} = \dfrac{n^{x+y}}{n^{x+y}} = 1$, et il ne reste finalement que le quotient $\dfrac{(\frac{x+y}{2})^2(\frac{x+y+2}{2})^2\dots(\frac{x+y+2n}{2})^2}{x(x+1)\dots(x+n)\times y(y+1)\dots(y+n)}$. Or, comme chacun le

sait depuis sa plus tendre enfance, si a et b sont deux réels positifs, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$ puisque $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \dfrac{a^2+b^2-2ab}{4} = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 \geqslant 0$. On peut appliquer ce résultat à $a = x$ et $b = y$, puis $a = x+1$ et $b = y+1$ et ainsi de suite jusqu'à $a = x+n$ et $b = y+n$ pour constater que notre quotient est un produit de termes qui sont tous supérieurs ou égaux à 1, et donc qu'il est lui-même supérieur ou égal à 1. Cela prouve bien que $\left(\Gamma_n\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leqslant \Gamma_n(x)\Gamma_n(y)$, puis la même inégalité sur les valeurs de Γ par simple passage à la limite.

4. On peut simplement écrire $\ln(\Gamma_n(x)) = \ln(n!) + x\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \ln(x+k)$. On dérive deux fois cette expression (on peut, tout est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$) pour obtenir $\ln(\Gamma)''(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2}$, qui est assez clairement une fonction positive. La fonction $\ln(\Gamma_n)$ est donc convexe.
5. Un passage à la limite conservant les inégalités (en particulier celles de convexité), la convexité de $\ln(\Gamma)$ découle de celle de $\ln(\Gamma_n)$. Une fonction f telle que $\ln(f)$ est convexe est parfois appelée log-convexe. C'est un exercice classique de prouver qu'une fonction log-convexe est toujours convexe, mais c'est en fait loin d'être évident. Du coup, on va tricher lamentablement et utiliser un théorème que vous verrez en deuxième année, qui permet de dériver les fonctions définies par des intégrales : on sait que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, on peut simplement obtenir sa dérivée en dérivant « sous l'intégrale » la fonction à intégrer **par rapport à** x. Autrement dit, comme $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))t^{x-1}e^{-t}\,dt$, puis $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt$, qui est manifestement positif, ce qui prouve la convexité de Γ. Bien entendu, l'application de ce théorème de dérivations sous les intégrales est en fait soumis à la vérification d'hypothèses techniques loin d'être triviale que nous balancerons joyeusement sous le tapis.
6. Les calculs des valeurs entières de la fonction Γ (question $A.2.c$) montrent que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Le théorème de Rolle assure donc que la dérivée Γ' de Γ s'annule en une valeur $\alpha \in]1,2[$. Or, par convexité de Γ, Γ' est strictement croissante, et sera donc négative avant α et positive après, ce qui donne les variations demandées pour Γ.
7. La fonction Γ étant croissante sur $[\alpha,+\infty[$, elle admet nécessairement une limite en $+\infty$, éventuelle infinie. Mais comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Gamma(n) = +\infty$ (puisque $\Gamma(n) = (n-1)!$), on a en fait $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$. En 0, on a également une limite en appliquant à nouveau la convergence monotone. On peut ensuite appliquer la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour écrire, quand x tend vers 0, $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x}\Gamma(x+1) = \dfrac{1}{x}(\Gamma(1) + x\Gamma'(1) + o(x))$. Or, on connait déjà le développement limité à l'ordre 1 en 1 de la fonction Γ, calculé en fin de première partie de ce problème. On a donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} - \gamma + o(1)$. La fonction Γ étant par ailleurs dérivable deux fois en 1, on sait qu'elle admettra un développement limité à l'ordre 2 en 1, donc qu'on peut ajouter un terme de la forme βx^2 (avant multipliciation par $\dfrac{1}{x}$) dans notre calcul, qui permet de transformer le $o(1)$ finalement obtenu en $O(x)$. Est-on par hasard capables de calculer la valeur de $\Gamma''(1)$ pour aller encore plus loin ? Je vous laisse y réfléchir pendant les vacances. Je me contenterai de terminer ce corrigé avec une allure du graphe de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$:


4
3
2
1
0
0
1
2
3
4