Devoir Maison n° 15

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 14 juin 2022

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction Γ, qui est une fonction très classique « interpolant les factorielles » sur $]0, +\infty[$. La définition classique de cette fonction fait intervenir une intégrale impropre : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$. Comme nous ne disposons pas des outils nécessaires pour l'étudier de cette façon (vous reverrez sûrement tout ça l'an prochain), on utilisera une définition de cette même fonction faisant intervenir une limite d'intégrales plus classiquement définies sur un segment.

A. Définition de la fonction Γ.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \geqslant 1$, on pose $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
   (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0, n[$, $n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leqslant (n+1) \ln\left(1 - \dfrac{t}{n+1}\right)$.
   (b) Montrer que $\Gamma_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^n t^{x-1} e^{-t}\, dt$.
   (c) Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ (x étant ici fixé, toujours supérieur ou égal à 1).
   (d) En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))$ converge vers un réel qu'on notera $\Gamma(x)$.
2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$.
   (b) En déduire que $\Gamma_n(x) = \dfrac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$.
   (c) En déduire la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Quels sont les valeurs prises par la fonction Γ sur les entiers $k \geqslant 1$ (on justifiera rigoureusement la réponse donnée) ?
3. On cherche désormais à étudier localement la fonction Γ au voisinage de 1.
   (a) Montrer que, si $\varepsilon \geqslant 0$, $\ln(\Gamma_n(1+\varepsilon)) - \ln(\Gamma_n(1)) = \varepsilon \left(\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{k} - \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right)\right)$.
   (b) Montrer que, $\forall u \geqslant 0$, $|\ln(1+u) - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{k} - \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right)\right) \leqslant \varepsilon^2$.
   (d) En déduire que $\ln(\Gamma(1+\varepsilon)) \underset{\varepsilon \to 0}{=} -\gamma\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, où γ est la constante d'Euler-Mascheroni introduite dans le cours sur les séries.
   (e) En déduire que la fonction Γ est dérivable en 1 et donner la valeur de $\Gamma'(1)$.

B. Retour sur l'expression intégrale de la fonction Γ.

1. Montrer que, sur l'intervalle $[0, n]$ (où n est un entier naturel non nul),
$$\left|(e^{-\frac{t}{n}})^n - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{t^2}{2n}$$
.
2. Montrer que, si a est un réel positif, pour tout entier $n \geqslant a$,
$$\left|\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \int_0^a t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ dt\right| \leqslant \frac{a^{x+2}}{2n(n+2)}$$
.
3. Montrer l'existence d'un réel M tel que $\displaystyle\int_a^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ dt \leqslant Me^{-\frac{a}{2}}$.
4. En déduire que $\displaystyle\left|\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt - \Gamma(x)\right| \leqslant Me^{-\frac{a}{2}}$. Cette majoration justifie la définition de la fonction Γ donnée dans l'introduction : $\displaystyle\Gamma(x) = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\ dt$.
5. Calculer la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$, en utilisant le résultat suivant (intégrale de Gauss) :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
.

C. Prolongement de Γ à $]0, +\infty[$, propriétés supplémentaires.

On définit désormais, de façon cohérente avec les résultats de la première partie,
$\Gamma_n(x) = \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant \ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(\Gamma_n(x)) \leqslant \dfrac{x(x+1)}{n(n+1)}$.
2. En déduire la convergence de la suite $(\Gamma_n(x))$ vers un réel qu'on notera brillamment $\Gamma(x)$. On admettra sans refaire la démonstration que la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ reste valable si $x \in]0, 1]$.
3. Soient x et y deux réels strictement positifs, simplifier $\dfrac{\Gamma_n(x)\Gamma_n(y)}{\Gamma_n\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right)}$, en déduire que $\Gamma\left(\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\right) \leqslant \Gamma(x)\Gamma(y)$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma_n(x))$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire que la fonction Γ est convexe.
6. Montrer que Γ est décroissante sur $]0, \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, +\infty[$, pour un certain réel $\alpha \in]1, 2[$.
7. Déterminer les limites de Γ en 0 et en $+\infty$, puis calculer un développement asymptotique à l'ordre $O(x)$ de $\Gamma(x)$ quand x tend vers 0.