DM n°14 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

30 mai 2022

1. Comme souvent quand il s'agit d'inverser une matrice, je préfère résoudre un système (ici, ça va vraiment vite, donc ça vaut le coup). Écrivons donc un système générique de matrice R : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & 6z & + & t & = & a \\ x & & & + & 5z & & & = & b \\ -x & & & + & z & & & = & c \\ & & -y & & & & & = & d \end{array}\right.$. Ce système est vraiment trivial à résoudre : la dernière équation donne directement $y = -d$, la somme des deux précédentes donne $6z = b + c$, donc $z = \dfrac{1}{6}b + \dfrac{1}{6}c$, et on déduit via la troisième équation que $x = z - c = \dfrac{1}{6}b - \dfrac{5}{6}c$. Enfin la première équation permet de trouver $t = a + 6z - y = a + b + c + d$. Le système admet toujours une solution unique, la matrice R est donc inversible, et les expressions obtenues pour notre solution donnent $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bien entendu, un brutal pivot de Gauss fonctionne également très bien pour calculer cet inverse.

2. (a) Oh, une question intéressante ! On calcule donc $SR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -30 & 9 \\ -1 & 0 & 25 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Il est bien sûr rassurant de tomber sur une matrice diagonale.

   (b) En notant D la matrice diagonale obtenue à la question précédente, on prouve par une récurrence extrêmement classique que, pour tout entier naturel n, on aura $S^n = RD^nR^{-1}$. En effet, c'est vrai au rang 0 : $RD^0R^{-1} = RI_3R^{-1} = I_3 = S^0$. Supposons maintenant la formule vraie au rang n, alors $S^{n+1} = S \times S^n = SRD^nR^{-1} = RR^{-1}SRD^nR^{-1} = RDD^nR^{-1} = RD^{n+1}R^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Il ne reste plus alors qu'à calculer brillamment $RD^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \times 5^n & 9^n \\ (-1)^n & 0 & 5^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis enfin $S^n = RD^nR^{-1} = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6} & \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5^n - (-1)^n}{6} & \frac{5^n + 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

3. (a) Si personne n'est contagieux au jour n (c'est notre hypothèse $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n + 1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), donc $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (b) C'est en fait pareil que la question précédente ! En effet, d'après l'hypothèse, les personnes contagieuses au jour n deviennent saines au jour $n + 1$, donc si $X_n = 3$ (tout le monde est contagieux), alors $X_{n+1}=0$. Si on préfère, $P_{X_n=3}(X_{n+1}=0)=1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1}=1)=P_{X_n=3}(X_{n+1}=2)=P_{X_n=3}(X_{n+1}=3)=0$.

(c) C'est tout à fait logique : si $X_n=1$, la seule personne contagieuse au jour n redeviendra de toute façon saine au jour $n+1$, et chacun des deux individus restants deviendra contagieux avec une même probabilité (et de façon indépendante) $\frac{1}{3}$. On est donc dans une espèce de schéma de Bernouilli où notre contagieux essaie deux fois de suite de contaminer une personne, et où on compte le nombre de fois où il « réussit ». On obtient alors $X_{n+1}\sim\mathcal{B}\left(2,\frac{1}{3}\right)$.

(d) Cette fois-ci il y a deux contagieux qui vont redevenir sains au jour $n+1$. Une seule personne peut donc devenir malade, ce qui impose $X_{n+1}(\Omega)=\{0,1\}$. Par ailleurs, cette personne a deux fois de suite (indépendamment) une probabilité $\frac{1}{3}$ de se faire contaminer. Il deviendra malade si **au moins** l'un des deux autres le contamine, et restera donc sain s'il ne se fait contaminer par aucun des deux, autrement dit avec une probabilité égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. Autrement dit, $P(X_{n+1}=0)=\frac{4}{9}$ et $P(X_{n+1}=1)=\frac{5}{9}$, ce qui correspond à $X_{n+1}\sim\mathcal{B}\left(1,\frac{5}{9}\right)$.

4. Commençons par préciser la loi de la variable X_0 sous ces hypothèses : $P(X_0=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, $P(X_0=1)=\binom{3}{1}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}$, $P(X_0=2)=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$, et $P(X_0=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$. On connait par ailleurs, à l'aide de la question précédente, toutes les probabilités conditionnelles $P_{X_n=i}(X_{n+1}=k)$ (certaines n'ont pas été écrites explicitement, ce sont celles correspondant à des lois binomiales, mais on écrit les formules du cours pour les retrouver, par exemple $P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=\binom{2}{1}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$).

On peut ensuite appliquer la formule des probabilités totales pour calculer chacune des probabilités constituant la loi de X_1. Ainsi, $P(X_1=0)=P(X_0=0)\times P_{X_0=0}(X_1=0)+P(X_0=1)\times P_{X_0=1}(X_1=0)+P(X_0=2)\times P_{X_0=2}(X_1=0)+P(X_0=3)\times P_{X_0=3}(X_1=0)=\frac{8}{27}\times1+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{27}\times1=\frac{51}{81}$. On calcule de même $P(X_1=1)=\frac{8}{27}\times0+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{27}\times0=\frac{26}{81}$. Par ailleurs, $P(X_1=3)=0$ puisqu'on ne peut en fait jamais contaminer les trois individus le même jour. On peut obtenir la dernière probabilité $P(X_1=2)=\frac{4}{81}$ paresseusement par passage au complémentaire si on ne veut pas appliquer une troisième fois la formule des probabilités totales. Un petit tableau pour résumer tout cela :

k	0	1	2	3
$P(X_1=k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

On calcule alors l'espérance $E(X_1)=\dfrac{26+2\times4}{81}=\dfrac{34}{81}$.

5. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on a simplement $u_n+v_n+w_n+t_n=1$.

(b) C'est exactement la formule des probabilités totales qu'on a déjà utilisée dans la question 4. On aura donc, sans réécrire entièrement les formules,

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}\times$$

U_n, donc $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $M = \frac{1}{9}S$.

(c) D'après la question précédente, on aura simplement $M^n = \frac{1}{9^n}S^n$. Non, on ne va pas tout recopier, ça ne sert à rien.

(d) On prouve par une récurrence triviale que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n : c'est évident au rang 0, et si on le suppose vrai au rang n, alors $u_{n+1} = M \times U_n = M \times M^n U_0 = M^{n+1}U_0$, ce qui prouve l'hérédité. On a donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{9^n}M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$.

En reprenant l'expression de M^n et en calculant simplement les deux premières lignes, on a alors $u_n = \frac{1}{9^n}(9^n u_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^n t_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (u_0 + w_0) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$. De même, $v_n = \frac{1}{9^n}\left(\frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6}v_0 + \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6}w_0\right)$ (aucun intérêt à essayer de simplifier plus cette expression).

6. (a) Les évènements $(X_n = 0)$ forment une suite croissante d'évènements (au sens de l'inclusion : $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$) dont l'union représente toutes les situations où l'épidémie finira par être éradiquée (si $X_n = 0$, plus personne ne peut retomber malade).

(b) Il s'agit ici de calculs de probabilités qui font en fait intervenir des choses que vous verrez l'an prochain, mais on peut quand même comprendre ce qui se passe grâce aux formules obtenues à la fin de la question 5 : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ quelles que soient les valeurs de u_0, v_0, w_0 et t_0 (puisque la suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ va de toute façon tendre vers 0), ce qui signifie bien qu'on tend systématiquement à atteindre une situtation où le virus a disparu.

7. Histoire de ne pas respecter l'énoncé, un programme qui prend comme paramètres la population N et la probabilité p qu'un malade contemine une personne saine, ainsi que le nombre n de jours qu'on veut laisser passer pour la simulation. On crée d'abord une situation initiale où chaque personne a une probabilité p d'être malade (liste l contenant des True pour chaque personne malade, des False pour les personnes saines), puis on fait évoluer la situation n fois de suite. À chaque fois, on stocke le nombre de malades dans la liste nommée bilan pour pouvoir tracer l'évolution jour après jour. Mon programme est ultra laid, vous avez le droit de ne rien y comprendre. En-dessous un exemple d'évolution obtenu avec $N = 20$, $p = 0.1$ et $n = 100$ (on voit sur cette exemple que l'épidémie a fini par être éradiquée après environ 10 semaines, mais avec les mêmes données initiales, le comportement peut être très différent). Exercice supplémentaire pour les très motivés : estimer l'espérance du nombre de jours à attendre avant éradication avec ces paramètres (on a une probabilité 1 que le virus finisse par disparaitre).

```
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt
def covid(N,p,n) :
    l=[True if random()<p else False for i in range(N)]
    bilan=[l.count(True)]
    for i in range(n) :
        ltemp=l[ :]
        for j in range(N) :
            if not ltemp[j] :
```

```
                    for k in range(N) :
                        if l[k] and random()<p :
                            ltemp[j]=True
                else :
                    ltemp[j]=False
        l=ltemp[ :]
        bilan.append(l.count(True))
    jours=[i for i in range(n+1)]
    plt.plot(jours,bilan)
    return l
```