Devoir Maison n° 13 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 mai 2022

Problème : étude théorique de la diagonalisabilité.

I. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

1. (a) N'importe quel polynôme ayant un coefficient constant non nul fera l'affaire, par exemple $P = X$.
   (b) L'application f étant une symétrie, $f^2 = \mathrm{id}$, donc $X^2 - 1$ convient.
   (c) Ici, on peut se contenter de prendre $P = X - 1$, mais id étant un cas (très) particulier de symétrie, on pouvait aussi garder $X^2 - 1$.
   (d) Cette fois, on aura $f^2 = f$, donc on peut prendre $P = X^2 - X$.
   (e) Par définition de la nilpotence, un polynôme de la forme $P = X^n$ conviendra, pour un entier n pour lequel $f^n = 0$.
   (f) Un calcul trivial montre que $A^2 = 4A$, donc $f^2 = 4f$. Le polynôme $P = X^2 - 4X$ convient donc.
2. Comme on l'a vu en cours, $P(M)$ sera la matrice représentative de $P(f)$ dans la même base, donc la question est complètement triviale.
3. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension n^2, une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{L}(E)$ est nécessairement liée. Il existe donc une combinaison linéaire reliant les applications id_E, f, f^2 ..., f^{n^2}, ce qui revient exactement à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$, donc qu'il existe un polynôme de degré n^2 annulant f. En fait, on peut toujours trouver un polynôme de degré nettement plus petit (au maximum n).
4. (a) C'est évident : si $P(f) = Q(f) = 0$, alors $(P + Q)(f) = 0 + 0 = 0$.
   (b) C'est à nouveau évident : $RP(f) = R(f)P(f) = 0$.
   (c) La propriété énoncée prouve qu'il existe un polynôme engendrant I_f (c'est le terme technique utilisé quand un idéal est constitué de tous les multiples d'un polynôme donné). Ce polynôme est nécessairement de degré minimal parmi tous les polynômes de I_f (en excluant bien entendu le polynôme nul) puisque $d^\circ(PQ) \geqslant d^\circ(P)$ si $Q \neq 0$. Quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut bien sûr transformer ce polynôme (qu'on va noter P_0) en polynôme unitaire, ce qui ne changera rien au fait qu'il engendre I_f. Supposons maintenant qu'il existe un deuxième tel polynôme unitaire P_1, ce deuxième polynôme est alors lui aussi de degré minimal, donc de même degré que P_0. Comme P_0 et P_1 sont tous deux unitaires, leur différence $P_0 - P_1$ est alors un polynôme de degré strictement inférieur annulant f, donc nécessairement nul. Cela prouve que $P_0 = P_1$ et donc que P_0 est unique.

II. Sous-espaces propres d'un endomorphisme.

1. C'est la définition du noyau : $u \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \Leftrightarrow f(u) - u = 0 \Leftrightarrow u \in E_\lambda$.

2. Tout noyau est un sous-espace vectoriel. De plus, si $u \in E_\lambda$, par définition, $f(u)$ est proportionnel à donc appartient aussi à E_λ qui est stable par produit extérieur, ce qui prouve sa stabilité par f.
3. C'est en fait exactement la même démonstration : une somme de sev est un sev, et si $(u_1, \dots, u_k) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_k}$, $f(u_1 + \cdots + u_k) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k e_k \in E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ par stabilité de ce sev par combinaisons linéaires.
4. (a) Supposons donc que $P(f) = 0$, et considérons un vecteur propre u associé à la valeur propre λ. Par définition, $f(u) = \lambda u$, donc $f^2(u) = \lambda^2 u$, puis $f^k(u) = \lambda^k u$ pour tout entier k (récurrence triviale si on veut être rigoureux). En particulier, par linéarité, on obtient $P(f)(u) = P(\lambda)u$. Comme cette image doit être nulle et que u ne peut pas être égal au vecteur nul, c'est donc que $P(\lambda) = 0$, ce qui prouve que toutes les valeurs propres de f sont racines de P. Bien entendu, c'est en particulier le cas pour P_f.

   (b) Supposons donc α racine (simple) de P_f, alors le polynôme Q défini par $P_f = (X - \alpha)Q$ ne peut pas annuler f (sinon cela contredirait la minimalité de P_f). Il existe donc au moins un vecteur $u \in E$ tel que $Q(f)(u) \neq 0$. Notons donc v le vecteur $Q(f(u))$. Par définition de Q, $(f - \alpha\,\mathrm{id})(v) = (f - \alpha\,\mathrm{id})(Q(f)(u)) = P_f(u) = 0$, ce qui implique que $f(v) = \alpha v$, et donc que v est un vecteur propre associé à α, qui est donc valeur propre de f.

   (c) On a prouvé les deux sens de l'équivalence dans les deux questions précédentes. Puisque P_f est un polynôme non nul admettant un nombre fini de racines, f ne peut donc avoir qu'un nombre fini de valeurs propres (pour les curieux, ce résultat serait complètement faux en dimension infinie).
5. Le fait que la réunion des bases soit une famille génératrice de la somme est assez évident : si $u \in E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_k}$, par définition, $u = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, avec $v_i \in E_{\lambda_i}$. Comme chaque vecteur v_i peut donc s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base choisie pour l'espace E_{λ_i}, u est donc bien combinaison linéaire de tous les vecteurs obtenus en réunissant ces différentes bases. Prouvons ensuite que la famille est libre, en procédant par récurrence forte sur le nombre k de sous-espaces E_{λ_i} dont on fait la somme. Dans le cas où $k = 2$, considérons un vecteur appartenant à $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$, donc $u = v_1 + v_2$, avec les mêmes conventions de notation que précédemment. Si cette combinaison linéaire des vecteurs obtenus en réunissant les deux bases de nos espaces s'annule, alors $v_2 = -v_1$. Or, par hypothèse $v_1 \in E_{\lambda_1}$, donc $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, et de même $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Mais par ailleurs on doit avoir $f(v_1 + v_2) = 0$, donc $\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1$. Les valeurs de λ_1 et λ_2 étant distinctes, cela implique que $v_1 = 0$, donc également $v_2 = 0$, ce qui prouve que la famille « réunion des bases »est libre (chacun des coefficients permettant d'obtenir v_1 comme combinaison linéaire des vecteurs de base de E_{λ_1} est nul puisqu'il s'agit d'une base, et de même pour v_2). Supposons désormais que la propriété soit vérifiée pour une somme de k sous-espaces propres, et ajoutons un $k+1$-ème espace. On procède alors comme précédemment : soit $u = v + v_{k+1}$ un vecteur décomposé comme somme d'un vecteur de $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ et d'un vecteur de $E_{\lambda_{k+1}}$. Si on suppose $u = 0$, on aura donc $v_{k+1} = -v$, et en même temps $f(v) = -f(v_{k+1}) = -\lambda_{k+1} v_{k+1} = \lambda_{k+1} v$. En décomposant v sous la forme $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ (toujours les mêmes notations), on aura donc $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \lambda_{k+1} v_{k+1}$, donc $\lambda_i - \lambda_{k+1} = 0$ pour tout vecteur v_i non nul en appliquant l'hypothèse de récurrence. Comme les valeurs propres sont toutes distinctes, on impose donc $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0$, et il ne reste plus que la condition $v_{k+1} = 0$ qui impose la nullité des derniers coefficients (ceux concernant les vecteurs de la base de $E_{\lambda_{k+1}}$). La famille reste donc libre, ce qui achève notre récurrence.
6. C'est en fait facile : si f est diagonalisable, par définition, il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f, donc de vecteurs appartenant à un des espaces E_λ. Cette base étant génératrice, cela prouve que E est la somme des espaces E_λ, et on vient de prouver que cette somme était nécessairement une somme directe. Réciproque, si E est somme directe des sous-espaces propres, toute réunion de bases de ces sous-espaces formera une base de E, ce qui

prouve immédiatement l'existence d'une base de vecteurs propres, et donc la diagonalisabilité de f.