# Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 13

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 3 mai 2022

## Problème : étude théorique de la diagonalisabilité.

Dans tout ce problème, $f$ désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$, supposé de dimension finie $n$. On notera comme d'habitude $f^n$ l'endomorphisme obtenu en composant $f$ par lui-même $n$ fois (avec $f^0 = \mathrm{id}_E$), et pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on posera $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

### I. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

Un polynôme $P$ est appelé **polynôme annulateur** de $f$ si $P(f)$ est l'application nulle.

1. Donner un polynôme annulateur de $f$ dans chacun des cas suivants (en expliquement rapidement votre choix) :
   (a) $f$ est l'endormorphisme nul.
   (b) $f : M \mapsto M^\top$ défini sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) $f = \mathrm{id}_E$.
   (d) $f$ est une projection (quelconque) de $E$.
   (e) $f$ est un endomorphisme nilpotent.
   (f) $f$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Expliquer pourquoi, si $M$ est la matrice représentative de $f$ dans une base quelconque de $E$, tout polynôme annulateur de $M$ est aussi un polynôme annulateur de $f$.
3. Expliquer pourquoi la famille d'applications linéaires $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est nécessairement liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. En déduire qu'il existe nécessairement un polynôme annulateur de $f$.
4. On note $I_f$ l'ensemble des polynômes annulateurs de $f$, qui est donc un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}[X]$.
   (a) Montrer que $I_f$ est stable par somme : $\forall (P, Q) \in I_f^2$, alors $P + Q \in I_f$.
   (b) Montrer que $\forall P \in I_f$, $\forall R \in \mathbb{K}[X]$, $RP \in I_f$.
   (c) Un sous-ensemble « stable par somme et par produit par n'importe quel polynôme » est appelé **idéal** de $\mathbb{K}[X]$. On admet que, pour tout idéal $I$ de $\mathbb{K}[X]$, il existe toujours un polynôme $P \in I$ tel que $I = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer alors, que pour $I = I_f$, il existe un unique polynôme $P_f$ **unitaire** qui vérifie $I_f = \{P_f Q \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Ce polynôme $P_f$ sera alors appelé **polynôme minimal** de $f$.

## II. Sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $f$, on appelle **sous-espace propre associé à** $\lambda$ le sous-ensemble $\{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$. On le notera pour la suite $E_\lambda$ ce sous-espace propre. On rappelle que, par définition, $\lambda$ valeur propre de $f$ implique $E_\lambda \neq \{0\}$.

1. Montrer que $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $E_\lambda$ est un sev de $E$ stable par l'application $f$.
3. Montrer plus généralement que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de $f$, alors $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ est un sev de $E$ stable par $f$.
4. On veut désormais faire le lien entre le polynôme minimal $P_f$ défini dans la première partie, et les valeurs propres de $f$.
   (a) En considérant un vecteur propre associé à $\lambda$, montrer que toute valeur propre de $f$ est racine de tout polynôme annulateur de $f$, et donc de $P_f$.
   (b) Réciproquement, si $\alpha$ est racine de $P_f$, en factorisant sous la forme $P_f = (X - \alpha)Q$, montrer que $\alpha$ est nécessairement valeur propre de $f$.
   (c) En déduire que le spectre de $f$ est constitué des racines de $P_f$, et qu'il contient donc un nombre fini de valeurs propres.
5. Montrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}$ associés aux différentes valeurs propres de $f$ sont en somme directe (notion non définie en cours pour plus de deux espaces), c'est-à-dire que la réunion de bases de ces sous-espaces propres forme une base de leur somme.
6. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$, où $Sp(f)$ désigne le spectre de $f$, et la notation $\oplus$ désigne une somme directe telle que décrite à la question précédente.