Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 12 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 avril 2022

Transformée de Fenchel-Legendre.

I. Exemples.

1. (a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut évidemment se contenter de la caractérisation via le signe de la dérivée seconde : $f'(x) = x$ puis $f''(x) = 1 > 0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. On note donc $F_p(x) = px - \dfrac{1}{2}x^2$. Cette fonction est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F_p'(x) = p - x$, qui s'annule quand $x = p$. La fonction F_p est donc croissante puis décroissante et admet un maximum en p de valeur $F_p(p) = p^2 - \dfrac{1}{2}p^2 = \dfrac{1}{2}p^2$.

   (b) On a donc $J_f = \mathbb{R}$ et $f^* = f$ (la variable n'est pas la même mais la fonction l'est bien !). Pas besoin donc de refaire de calcul, on aura nécessairement $f^{**} = f^* = f$.

2. (a) Par définition, $F_p(x) = px - e^x$. La fonction F_p est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F_p'(x) = p - e^x$. Distinguons donc trois cas comme on nous le conseille gentiment :

   - si $p < 0$, F_p' est toujours négative, donc F_p est strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_p(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_p(x) = -\infty$ (ça ce sera le cas quelle que soit la valeur de p par croissance comparée). La fonction F_p est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - si $p = 0$, on a simplement $F_0(x) = -e^x$, qui est décroissante, tend vers 0 en $-\infty$ (et vers $-\infty$ en $+\infty$).
   - enfin, si $p > 0$, F_p' s'annule en $x = \ln(p)$, la fonction F_p est alors croissante puis décroissante, admettant un maximum de valeur $F(\ln(p)) = p\ln(p) - p = p(\ln(p) - 1)$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_p(x) = -\infty$ dans ce cas.

   (b) C'est une conséquence immédiate des calculs précédents, F_p est majorée si et seulement si $p \geqslant 0$, et le maximum de F_p est égal à $p\ln(p) - p$ si $p > 0$. Si $p = 0$, F_p n'a pas de maximum mais effectue une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty, 0[$, donc $f^*(0) = \sup(F_0) = 0$.

   (c) Oui, la fonction est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} p\ln(p) = 0$ par croissance comparée. De plus, $\tau_0(h) = \dfrac{h\ln(h) - h}{h} = \ln(h) - 1$ a une limite infinie quand h tend vers 0. La fonction f^* n'est donc pas dérivable en 0 (on aura une tangente verticale à l'origine). Pour la convexité, on peut dériver deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$: $(f^*)'(p) = \ln(p) + 1 - 1 = \ln(p)$ puis $(f^*)''(p) = \dfrac{1}{p} > 0$, donc la fonction f^* est bien convexe.

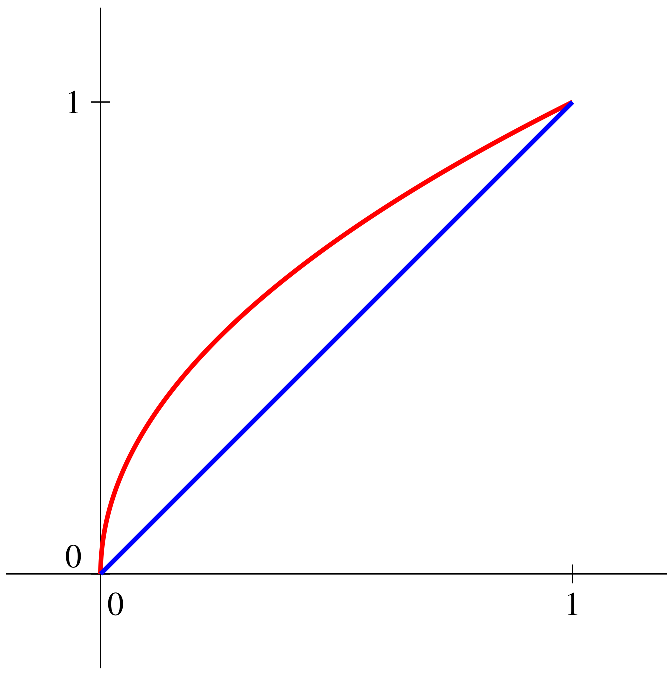
   (d) On a $F_x^*(p) = xp - p\ln(p) + p$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $(F_x^*)'(p) = x - \ln(p)$, qui s'annule pour $p = e^x$. La fonction F_x^* est donc croissante sur $]0, e^x[$, puis décroissante sur $]e^x, +\infty[$, et admet pour maximum $F_x^*(e^x) = xe^x - e^x x + e^x = e^x$. On en déduit que $J_{f^*} = \mathbb{R}$ et $f^{**} = f$.

3. (a) On pose $F_p(x) = px - \sqrt{x}$, qui est définie sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$, de dérivée $F_p'(x) = p - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2p\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$. Si $p \leqslant 0$, la fonction F_p est décroissante et admet donc un maximum en 0, de valeur $F_p(0) = 0$. Si $p > 0$, la dérivée s'annule en $\frac{1}{4p^2}$. Si $p \leqslant \frac{1}{2}$, cette valeur d'annulation est supérieure ou égale à 1 et la fonction F_p est donc toujours décroissante, avec maximum égal à 0 atteint en 0. Mais si $p \geqslant \frac{1}{2}$, la fonction sera décroissante puis croissante, et atteint donc son maximum soit en 0 soit en 1.

   (b) On a donc $J_f = \mathbb{R}$, et $\forall p \leqslant \frac{1}{2}$, $f^*(p) = 0$. Si $p \geqslant \frac{1}{2}$, on calcule $F_p(1) = p - 1$. Cette valeur devient bien sûr positive quand $p \geqslant 1$, donc on a en fait encore $f^*(p) = 0$ si $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$, puis $f^*(p) = p - 1$ si $p \geqslant 1$.

   (c) D'après les calculs précédents, $F_x * (p) = xp$ si $p \leqslant 1$ et $F_x^*(p) = xp - p + 1$ si $p \geqslant 1$. Si $x < 0$, la fonction F_x^* ne peut pas être majorée puisqu'elle a une limite égale à $+\infty$ en $-\infty$. Si $x = 0$, on a $F_x^*(p) = 0$ sur $]-\infty, 1[$ puis $F_x^*(p) = 1 - p \leqslant 0$ ensuite, donc $0 \in J_{f^*}$ et $f^{**}(0) = 0$. Si $0 < x \leqslant 1$, F_x^* est croissante sur $]-\infty, 1]$, puis $F_x^*(p) = 1 + (x-1)p$, donc F_x^* devient décroissante à partir de $p = 1$ et a donc un maximum égal à $F_x^*(1) = x - 1 + 1 = x$. Enfin, si $x > 1$, F_x^* reste croissante sur $[1, +\infty[$ (coefficient directeur égal à $x - 1$) et admet une limite infinie en $+\infty$ donc ne peut pas être majorée. Finalement, on obtient $J_{f^*} = [0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $f^{**}(x) = x$.

   (d) Comme annoncé dans l'énoncé, la droite $y = x$ représente la courbe convexe située en-dessous de celle de f qui soit celle correspondant à la plus grand fonction possible.



II. Inégalité de Young.

1. Par définition, une borne supérieure est un majorant de l'ensemble considéré donc $\forall x \in I$, $\forall p \in J_f$, $F_p(x) = px - f(x) \leqslant f^*(p)$, ce qui est exactement l'inégalité demandée.
2. On peut écrire l'inégalité précédente sous la forme $\forall x \in I$, $\forall p \in J_f$, $F_x^*(p) \leqslant f(x)$. Cela prouve à la fois que F_x^* est majorée quand $p \in J_f$, donc admet une borne supérieure (l'ensemble étant non vide puisqu'on a supposé $J_f \neq \emptyset$), et que cette borne supérieure est nécessairement inférieure ou égale à $f(x)$ qui est un majorant de l'ensemble des valeurs prises par F_x^* sur J_f. On a donc bien $I \subset J_{f^*}$, et $f^{**}(x) \leqslant f(x)$.
3. Supposons p et q appartenant tous deux à J_f, donc vérifiant $\forall x \in I$, $px \leqslant f(x) + f^*(p)$ et $qx \leqslant f(x) + f^*(q)$, on peut alors écrire, $\forall t \in [0,1]$, $tpx + (1-t)qx \leqslant tf(x) + tf^*(p) + (1-t)f(x) + (1-t)f^*(q)$ (les facteurs t et $1-t$ étant tous les deux positifs, on peut additionner sans problème les inégalités), donc $(tp + (1-t)q)x - f(x) \leqslant tf^*(p) + (1-t)f^*(q)$. En notant $r = tp + (1-t)q$, on a donc $F_r(x) \leqslant tf^*(p) + (1-t)f^*(q)$. Autrement dit, $r \in J_f$ (la fonction J_r étant majorée sur I), et $f^*(r) \leqslant tf^*(p) + (1-t)f^*(q)$ puisque cette valeur est un majorant des valeurs prises par la fonction F_r. Comme tout élément de l'intervalle $[p,q]$ peut être écrit sous la forme $tp + (1-t)q$, cela prouve que $[p,q] \subset J_f$ dès que p et q appartiennent à J_f, et donc que J_f est un intervalle. De plus, on a bien prouvé en passant que $f^*(r) \leqslant tf^*(p) + (1-t)f^*(q)$, c'est-à-dire exactement la définition de la convexité de la fonction f^**.

III. Transformée de Fenchel-Legendre d'une fonction strictement convexe.

1. La fonction f étant supposée de classe $\mathcal{C}^1$, f' est continue. Comme on la suppose strictement croissante, elle est donc bijective, et sa réciproque sera elle aussi strictement croissante (théorème de la bijection).
2. C'est la définition même de la bijection !
3. On sait que $F_p(x) = px - f(x)$, et que F_p est dérivable sur I, de dérivée $F_p'(x) = p - f'(x)$. Comme f' est croissante, et $f'(x_p) = p$, on en déduit facilement que F_p est croissante sur $I \cap]-\infty, x_p]$ (notation peu lisible, mais qui désigne simplement la partie de l'intervalle I située à gauche de x_p) puis décroissante ensuite. Elle admet donc un maximum en x_p de valeur $F_p(x_p) = px_p - f(x_p)$. On en déduit que $J \subset J_f$ et que, $\forall p \in J$, $f^*(p) = px_p - f(x_p)$, avec $f'(x_p) = p$, donc $x_p = g(p)$. Autrement dit, $f^*(p) = pg(p) - f(g(p))$. Il n'y a par contre aucune raison que J soit **égal** à J_f, encore une imprécision dans l'énoncé.
4. Appliquons donc l'inégalité de Young : $px \leqslant f(x) + f^*(p)$, donc $xp - f^*(p) \leqslant f(x)$, pour x variant dans I et p dans J_f. En fait on n'a à nouveau strictement rien à faire dans cette question.
5. On sait déjà via le résultat de la question précédente que $x \in J_{f^*}$ et que $f^{**}(x) \leqslant f(x)$. Comme $p \in J \subset J_f$, on peut calculer l'expression $xp - f^*(p)$ pour $p = f'(x)$, ce qui donne $xf'(x) - f'(x)g(f'(x)) + f(g(f'(x)))$ en exploitant la formule obtenue précédemment. Mais comme g est la réciproque de f', cette expression vaut plus simplement $xf'(x) - f'(x)x + f(x) = f(x)$. Comme $f(x)$ est un majorant de l'ensemble des valeurs $\{px - f^*(p) \mid p \in J_f\}$, et qu'il est égal à une de ces valeurs, c'est donc qu'il en est en fait le maximum, et que $f^{**}(x) = f(x)$.

IV. Une dernière propriété.

1. On a déjà tout fait : $I \subset J_f$, puis $J_f \subset J_{f^*}$ (pour la même raison !) donc f^{**} est bien définie sur I. De plus, f^* est toujours une fonction convexe, donc f^{**} qui est la transformée de f^* également. Enfin, on a démontré dans la partie II que $f^{**}(x) \leqslant f(x)$.

2. (a) On sait que $p \in J_h$ si $\{px - h(x)\}$ est majoré quand x parcourt I, autrement dit s'il existe un réel k tel que, $\forall x \in I$, $px - h(x) \leqslant k$. On peut écrire cette inégalité sous la forme $px - k \leqslant h(x)$, ce qui revient exactement à dire qu'il existe une droite de pente p minorant h sur I.

(b) Puisque h est convexe, sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier, si p correspond à la pente d'une de ces tangentes, on aura donc une droite de pente p minorant h, ce qui prouve que $J_f \neq \emptyset$ (au pire, J_f peut être réduit à une seule valeur si toutes les tangentes à $\mathcal{C}_h$ ont la même pente, ce qui se produira si h est une fonction affine).

(c) C'est essentiellement évident : si k majore $\{px - h(x)\}$, alors il majore a fortiori $\{px - f(x)\}$ puisqu'on a supposé $h(x) \leqslant f(x)$. On a donc $J_h \subset J_f$, et tout majorant fonctionnant pour h étant aussi valable pour f, $f^*(p) \leqslant h^*(p)$ (autrement dit, $h^*(p)$ est un majorant de $\{px - f(x)\}$, donc supérieur à $f^*(p)$ qui est le plus petit de tous les majorants de cet ensemble).

(d) On peut appliquer aux fonctions f^* et h^* le même raisonnement que ci-dessus : $f^*(p) \leqslant h^*(p)$, $J_{f^*} \neq \emptyset$ et même $I \subset J_{f^*}$, ce qui prouve que $J_{h^*} \neq \emptyset$ puisque $J_{f^*} \subset J_{h^*}$ (même raison que dans la question précédente !), on obtient alors l'inégalité valable sur I tout entier $h^{**}(x) \leqslant f^{**}(x)$, ce qui prouve bien que $h(x) \leqslant f^{**}(x)$ en admettant que $h^{**}(x) = h(x)$ pour toute fonction convexe. On a donc bien prouvé que f^{**} était la plus grande fonction convexe minorant f (au moins avec l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ imposée en cours de route).