Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 12

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 4 avril 2022

Ce problème a été posé il y a peu de temps à vos camarades de la MPSI2 de Montaigne en devoir surveillé (après un premier exercice consacré à des histoires de matrices magiques). Ne me faites pas honte, trivialisez-le donc.

Transformée de Fenchel-Legendre.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour tout réel p, on définit F_p sur le même intervalle I par $F_p(x) = px - f(x)$. On note alors J_f l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles la fonction F_p est majorée sur I, puis, si $J_f \neq \emptyset$, on définit la transformée de Fenchel-Legendre f^* de f de la façon suivante : $f^* : \left\{ \begin{array}{lcl} J_f & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup_{x \in I} F_p(x) = \sup_{x \in I}(px - f(x)) \end{array} \right.$. Cette fonction est donc bien une fonction **de la variable** p.

On peut alors répéter ce procédé à partir de la fonction f^* : $F_x^*(p) = xp - f^*(p)$, puis, en notant J_{f^*} l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles F_x^* est majorée, on pose $\forall x \in J_{f^*}$, $f^{**}(x) = \sup_{p \in J_f}(xp - f^*(p))$.

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de cette transformée, et notamment de prouver que, sous certaines conditions, f^{**} est la plus grande fonction convexe minorant f.

I. Exemples.

1. On pose pour commencer $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ (et bien sûr $I = \mathbb{R}$).
   (a) Vérifier que f est convexe, puis montrer que la fonction F_p associée à f admet toujours un maximum, quelle que soit la valeur du réel p.
   (b) En déduire J_f, puis calculer l'expression de $f^*(p)$. En déduire sans calcul l'expression de f^{**}.
2. On pose cette fois $f(x) = e^x$, avec toujours $I = \mathbb{R}$.
   (a) Étudier les variations et les limites des fonctions F_p (on distinguera les cas $p < 0$, $p = 0$ et $p > 0$).
   (b) En déduire que $J_f = \mathbb{R}^+$, et que $f^*(p) = p\ln(p) - p$ pour tout p strictement positif. Que vaut $f^*(0)$?
   (c) La fonction f^* est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ? Convexe ?
   (d) Étudier les fonctions F_x^* sur $[0, +\infty[$, en déduire J_{f^*} et f^{**}.
3. On pose enfin $f(x) = \sqrt{x}$, avec $I = [0, 1]$.
   (a) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{R}$, F_p atteint un maximum en 0 ou en 1.
   (b) En déduire J_f et f^*.

(c) Déterminer J_{f^*} et f^{**}.

(d) Représenter dans un même graphique une allure de f et de f^{**}.

II. Inégalité de Young.

On suppose dans toute cette partie que f est une fonction pour laquelle $J_f \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\forall x \in I$, $\forall p \in J_f$, $px \leqslant f(x) + f^*(p)$ (inégalité de Young).
2. Montrer que $I \subset J_{f^*}$ et que, $\forall x \in I$, $f^{**}(x) \leqslant f(x)$.
3. Montrer que J_f est un intervalle et que f^* est convexe sur J_f.

III. Transformée de Fenchel-Legendre d'une fonction strictement convexe.

Dans cette partie, la fonction f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et telle que f' soit strictement croissante.

1. Justifier que f' est bijective de I vers un intervalle J. On notera g la réciproque de f^{-1}. Quelle est la monotonie de la fonction g ?
2. Soit $p \in J$, justifier qu'il existe un unique $x_p \in I$ tel que $f'(x_p) = p$.
3. Étudier alors la fonction F_p, en déduire que $J = J_f$ et exprimer $f^*(p)$ en fonction de f, g et p.
4. En utilisant l'inégalité de Young, montrer que, $\forall x \in I$, $f(x)$ majore $\{xp - f^*(p) \mid p \in J_f\}$.
5. En déduire que, $\forall x \in I$, $f^{**}(x) = f(x)$ (on pourra calculer $xp - f^*(p)$ avec $p = f'(x)$).

IV. Une dernière propriété.

On admettra si besoin que le résultat de la partie précédente s'étend aux fonctions convexes (mais pas nécessairement strictement convexes). Pour cette dernière partie, f n'est pas nécessairement convexe, mais vérifie toujours $J_f \neq \emptyset$.

1. Justifier à l'aide des résultats des parties précédentes que f^{**} est définie, convexe, et vérifie $f^{**}(x) \leqslant f(x)$ sur l'intervalle I.
2. Soit $h : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et $\mathcal{C}^1$ telle que, $\forall x \in I$, $h(x) \leqslant f(x)$.
   (a) Montrer en revenant à la définition de J_h que $p \in J_h \Leftrightarrow$ il existe une droite de pente p minorant h.
   (b) Quelle est la position de la courbe représentative de h par rapport à ses tangentes ? En déduire que $J_h \neq \emptyset$.
   (c) En déduire que $J_h \subset J_f$ et que, $\forall p \in J_h$, $f^*(p) \leqslant h^*(p)$.
   (d) Montrer finalement que $\forall x \in I$, $h(x) \leqslant f^{**}(x)$.