Petit Devoir Maison n° 11 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

14 mars 2022

1. On a 16 cases à colorier, chaque case pouvant être de quatre couleurs différentes. Cela revient exactement à choisir une 16-liste dans l'ensemble des quatre couleurs (les répétitions de couleurs sont évidemment possibles, et l'ordre des cases important), donc $4^{16} = 4\ 294\ 967\ 296$ possibilités.
2. C'est exactement la même chose avec seulement trois couleurs disponibles, donc $3^{16} = 43\,046\,721$ possibilités.
3. Le plus simple est de commencer par choisir quelles seront les six cases bleues, ce qui peut se faire de $\binom{16}{6}$ façons, puis de colorier les 10 cases restantes en utilisant les trois autres couleurs, ce qui donne $\binom{16}{6} \times 3^{10} = 472\ 864\ 392$.
4. On choisit par exemple d'abord les quatre cases blanches de $\binom{16}{4}$ façons, puis les quatre cases bleues parmi les douze cases restantes de $\binom{12}{4}$ façons, puis les cases vertes, et on n'a plus le choix pour les cases (on peut faire les choix dans un autre ordre, ça donnera exactement le même résultat final). On a donc $\binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} = 63\ 063\ 000$ coloriages possibles.
5. On a déjà compté le nombre de cas avec quatre cases de chaque couleur. Si on veut cinq cases de chaque couleur (et donc une case blanches pour compléter), on aura de façon analogue $\binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{5} = 12\ 108\ 096$ coloriages possibles. On ne peut pas avoir six cases de chaque couleur, on redescend donc en faisant à chaque fois le même type de calcul : pour trois cases de chaque couleur, $\binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{3} = 19\ 219\ 200$ coloriages possibles ; pour deux cases de chaque couleur, $\binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} = 720\ 720$ coloriages possibles ; pour une case de chaque couleur, $\binom{16}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{14}{1} = 3\ 360$ coloriages possibles ; et enfin un dernier coloriage totalement blanc. On additionne toutes ces valeurs (les différents cas étant bien sûr incompatibles pour obtenir un total de 95 114 377 coloriages.
6. Chaque ligne est donc constituée d'une permutation des quatre couleurs, ce qui laisse $4! = 24$ choix par ligne, et donc $24^4 = 331\ 776$ coloriages valables.
7. Ah oui, c'est la question qui n'aurait pas du être là. Ci-dessous, un programme Python qui calcule brutalement les cas possibles. La première fonction fait la liste de toutes les permutations des entiers de 1 à n (je vous laisse essayer de comprendre comment ça marche), puis

la seconde teste tous les coloriages où chaque ligne est une telle permutation, en ne comptant que ceux pour lequels chaque colonne est aussi une permutation (on peut ne pas vérifier la dernière colonne, ça marchera automatiquement si les quatre lignes et les trois premières colonnes en sont) :

```
def permutations(n) :
    l=[[]]
    for i in range(n) :
        m=[]
        for j in l :
            for k in range(n) :
                if k not in j :
                    m.append(j+[k])
        l=m
    return l

def comptegrilles() :
    l=permutations(4)
    c=0
    for i in l :
        for j in l :
            for k in l :
                for z in l :
                    if [i[0],j[0],k[0],z[0]] in l :
                        if [i[1],j[1],k[1],z[1]] in l :
                            if [i[2],j[2],k[2],z[2]] in l :
                                c+=1
                                print([i,j,k,z])
    return c
```

Ce programme ignoble renvoie instantanément la réponse : 576 grilles convenables (toutes affichées à l'écran puisque je l'ai demandé). Peut-on retrouver ce résultat par un raisonnement mathématique ? Oui, on commence par remplir la première ligne (24 possibilités) et compléter la première colonne (six possibilités). Peu importent les choix faits jusqu'ici, on aura toujours autant de possibilités de compléter la grille. Supposons donc que la première ligne et la première colonne soient dans l'ordre blanc/vert/bleu/rouge. Si on colorie en bleu la case de la deuxième ligne deuxième colonne, on n'a plus le choix pour le reste de la ligne (Rouge puis Bleu), ni pour les deux lignes suivantes (Bleu, Rouge, Blanc, Vert pour la troisième, Rouge, Blanc, Vert, Bleu pour la quatrième). De même si on met un Rouge en deuxième ligne deuxième colonne, on complète la deuxième ligne par Blanc et Bleu, et la troisième ligne est nécessairement Bleu, Blanc, Rouge, Vert et la dernière Rouge, Bleu, Vert, Blanc. Dernière possibilité, mettre un Blanc en deuxième ligne, deuxième colonne. On doit alors compléter la deuxième ligne et la deuxième colonne par du Rouge et du Bleu (dans cet ordre à chaque fois), mais on a deux possibilités pour le dernier carré en bas à droite de la grille (soit on fait une diagonale entière de Blanc, soit on met deux Vert pour compléter la diagonale). Au total, on a donc quatre possibilités une fois les premières ligne et colonne imposée, et au total $24 \times 6 \times 4 = 576$ coloriages convenables. Ça alors, mon programme fonctionne !

8. On choisit successivement la couleur du coin (4 possibilités), puis la couleur de chacune des huit cases adjacentes à un coin (3^8 possibilités puisqu'on ne doit pas utiliser la couleur des coins), et on fait ce qu'on veut pour les quatre cases centrales (4^4 possibilités), soit $4^5 \times 3^8 = 6\ 718\ 464$ possibilités.
9. On a 4^4 possibilités différentes pour colorier une ligne, dont seulement quatre n'utilisant **pas** deux couleurs au moins. Cela laisse donc $4^4 - 4$ possibilités pour chaque ligne, et $(4^4 - 4)^4 = 4\ 032\ 758\ 016$ coloriages possibles.
10. Cette fois-ci je vais me dispenser du passage au complémentaire. Pour chaque ligne, on peut soit utiliser les quatre couleurs ($4! = 24$ possibilités), soit n'en utiliser que trois et donc avoir une couleur apparaissant deux fois et deux autres apparaissant une fois. Il faut alors choisir la couleur qui apparait deux fois (quatre possiblités), celle qui n'apparait pas (plus que trois possibilités), choisir les deux cases de la couleur répétée ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités) et enfin l'ordre dans lequel apparaissent les deux couleurs uniques (deux possibilités), soit $4 \times 3 \times 6 \times 2 = 144$ coloriages possibles à trois couleurs pour chaque ligne, et donc au total $(144 + 24)^4 = 796\ 594\ 176$ coloriages convenables.