Devoir Maison n^o 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 février 2022

I. Intégrales de Wallis.

1. Allons-y : $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Pour W_2, on se rappelle bien sûr la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour en déduire la linéarisation $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, puis calculer $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) + 1\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le cos en $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(u)$. On obtient alors immédiatement $W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n(u)\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\ du$.
3. Si on veut faire vite, il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, donc $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$ et $v(t) = \sin(t)$, pour obtenir $W_{n+2} = [\sin(t)\cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\ dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$. On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
4. On va donc faire deux récurrences, une pour chaque formule. Commençons par celle donnée pour les termes d'indices pairs de la suite : $\frac{\pi}{2} \times \frac{0!}{2^0(0!)^2} = \frac{\pi}{2} = W_0$, ce qui initialise notre première récurrence. Supposons la formule donnée correcte pour W_{2n}, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}$, ce qui prouve l'éhérédité et achève la récurrence.
   Même principe pour démontrer la formule pour les termes d'indices impairs : $\frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1 = W_1$, et en supposant la formule vraie pour W_{2n+1}, alors $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$, ce qui prouve l'hérédité.
5. Puisque le cosinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\cos^{n+1}(t) \leqslant$

$\cos^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.

6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (W_n) pour obtenir l'encadrement $\dfrac{W_n}{W_n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.
7. La question précédente prouve que $W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{2n+1}$, donc en exploitant les formules explicites $\dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Quitte à réarranger un peu en faisant passer des termes à gauche et à droite, $\left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \sim \dfrac{2^{4n} \times 2}{\pi \times (2n+1)}$, donc en passant tout à la racine carrée (on a le droit, tout est positif et les puissances fixes conservent les équivalents) $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

II. Le retour d'une somme bien connue.

1. On peut essayer de voir cette inégalité comme une inégalité de convexité, ou simplement poser $f(t) = \dfrac{\pi}{2}\sin(t) - t$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et $f'(t) = \dfrac{\pi}{2}\cos(t) - 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $\cos(t) = \dfrac{2}{\pi}$, ce qui se produit à un moment sur notre intervalle d'étude (puisque $0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$). La fonction f est alors croissante puis décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et comme $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$, f est nécessaire positive, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.
2. En exploitant le résultat de la question précédente, $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $t^2\cos^{2n}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) = \dfrac{\pi^2}{4}(1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t) = \dfrac{\pi^2}{4}(\cos^{2n}(t) - \cos^{2n+2}(t))$. Il suffit d'intégrer cette majoration entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ pour obtenir $u_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2})$. La positivité de u_n est évidente : on intégre une fonction positive.
3. Si on divise l'encadrement précédent par W_{2n}, on obtient $0 \leqslant \dfrac{u_n}{W_{2n}} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4(n+2)}$ (on a repris la relation de la question I.3 pour simplifier à droite). Un petit coup de théorème des gendarmes montre alors le résultat demandé.
4. On effectue sur W_{2n+2} une IPP en posant $u(t) = \cos^{2n+2}(t)$, donc $u'(t) = -(2n+2)\sin(t)\cos^{2n+1}(t)$, et $v'(t) = 1$ qu'on intègre en $v(t) = t$. On obtient alors $W_{2n+2} = [t\cos^{2n+2}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+2)t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt$.
5. On a donc $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt$. Effectuons une nouvelle IPP en posant $u(t) = \sin(t)\cos^{2n+1}(t)$, donc $u'(t) = \cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\sin^2(t)\cos^{2n}(t) = \cos^{2n+2}(t) - (2n+1)(1-$

$\cos^2(t))\cos^{2n}(t) = (2n+2)\cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\cos^{2n}(t)$, et $v'(t) = 2t$ qu'on va intégrer en $v(t) = t^2$ pour obtenir $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = [t^2\sin(t)\cos^{2n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2((2n+2)\cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\cos^{2n}(t))\, dt = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ en développant simplement la dernière intégrale (le crochet est nul, comme pour l'IPP précédente).

6. En divisant la relarion précédente par W_{2n+2}, on a $\dfrac{1}{n+1} = (2n+1)\dfrac{u_n}{W_{2n+2}} - (2n+1)\dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}$. Or, on a démontré dans la première partie de l'exercice que $W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$, donc $\dfrac{1}{n+1} = (2n+2)\dfrac{u_n}{W_{2n}} - (2n+2)\dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}$, puis $\dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{2u_n}{W_{2n}} - \dfrac{2u_{n+1}}{W_{2n+2}}$, exactement la relation souhaitée.
7. En sommant la relation précédente pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et $n-1$, on va observer un télescopage : $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{W_{2k}} - \frac{u_{k+1}}{W_{2k+2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{u_0}{W_0} - \frac{u_n}{W_{2n}}\right)$. D'après la question 3, on peut donc affirmer la convergence de la somme infinie, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{u_0}{W_0}$. Or, on sait déjà que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, et $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$. On en déduit que la limite recherchée vaut $2 \times \dfrac{2\pi^3}{24\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

III. La formule de Stirling.

1. Les variations de f sont les mêmes que celles de $\ln(f) : x \mapsto \left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (fonction qu'on notera g pour la suite de la question), dont on va donc calculer la dérivée (elle est bien définie et dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$) : $g'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \left(x+\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$. Le signe n'étant pas évident, on va dériver une deuxième fois : $g''(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{4x(x+1)-(4x+2)(2x+1)}{4x^2(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{4x^2+4x+1-2x^2-2x}{2x^2(x+1)^2}$ $= \dfrac{-2x^2-2x+2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$. La fonction g' est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et a une limite nulle en $+\infty$ (calcul facile), donc g' est négative et g est donc une fonction décroissante. On en déduit que la fonction f elle-même est décroissante.
2. Commençons par calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{e}{n+1}\right)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n!} = \dfrac{en^n(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} = e \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{e}{f(n)}$, où f est la fonction étudiée dans la question précédente. On sait que f est décroissante, de plus $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ (équivalent classique du cours) donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$. Comme f est décroissante, on aura donc toujours $f(n) > e$, et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, ce qui prouve la décroissance

de la suite (v_n) (calculer les ln comme le suggérait l'énoncé ne sert en fait à rien). Comme la suite est bien sûr minorée par 0, elle converge donc nécessairement.

3. La fonction g_k est une fonction affine correspondant à la corde passant par les deux points de la courbe de la fonction ln d'abscisses k et $k+1$. La fonction ln étant concave sur $[k, k+1]$, sa courbe est donc située au-dessus de celle de g_k sur cet intervalle, ce qui justifie que $0 \leqslant \ln(t) - g_k(t)$. L'autre inégalité ne semblant pas triviale, posons brutalement $h_k(x) = (t-k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \ln(t) + g_k(t)$, la fonction h_k est dérivable sur $[k, k+1]$ et $h_k'(t) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{t} + g_k'(t)$. Or, g_k est une fonction affine correspondant à une droite de pente $\ln(k+1) - \ln(k)$, donc $h_k'(t) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{t} + \ln(k+1) - \ln(k)$. Cette dérivée est croissante (seul le terme $-\frac{1}{t}$ est variable), sa valeur minimale est donc $h_k'(k) = \ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in [k, k+1]$ tel que $\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$, ce qui prouve que $\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{k+1}$ (non ce n'est pas la seule façon de prouver ça, mais c'est joli), et donc que $h_k'(k) \geqslant 0$. La fonction h_k est donc croissante. Comme $h_k(k) = -\ln(k) + g_k(k) = 0$, la fonction h_k est elle-même toujours positive, ce qui prouve l'encadrement demandé.

4. On veut manifestement intégrer l'encadrement précédent entre k et $k+1$, puis additionner les encadrements obtenus lorsque k varie entre 1 et $n-1$. La fonction g_k étant affine sur l'intervalle $[k, k+1]$, son intégrale sur l'intervalle correspond à l'aire d'un trapèze rectangle dont les bases ont pour longueur $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$ et la hauteur est égale à 1, donc $\int_k^{k+1} g_k(t)\, dt = \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2}$ (si vous ne connaissez pas la formule pour le calcul d'aire d'un trapèze, refaites un calcul un peu plus détaillé). De même, le membre de droite de l'encadrement précédent correspond à une fonction affine sur $[k, k+1]$, avec pour valeurs 0 en k et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ en $k+1$, donc $\int_k^{k+1} (t-k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Or, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}$ (somme télescopique), ce qui donne l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

5. On peut calculer $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \ln(k+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{1}{2}\ln(n!) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n!}{n}\right) = \ln(n!) - \ln(\sqrt{n})$. De plus, $\int_1^n \ln(t)\, dt = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1 = n(\ln(n) - \ln(e)) - 1 = \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1$. Il n'y a qu'à tout remplacer et passer le 1 à droite pour transformer la majoration de la question précédente en celle demandée à celle-ci.

6. La majoration précédente peut exactement s'écrire $\ln\left(\frac{1}{v_n}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$, soit $\ln(v_n) \geqslant \frac{1}{2}$ et donc $v_n \geqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

7. Une suite convergente minorée par $\sqrt{e}$ a une limite supérieure ou égale à $\sqrt{e}$, et donc certainement pas nulle.

8. Puisque $v_n \sim l \neq 0$, on peut écrire $n! \sim l\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, donc $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim l\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \frac{(e^n)^2}{l^2(n^n)^2 \times n} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{l\sqrt{n}}$. En comparant avec l'équivalent donné par la formule de Wallis, on constate que les termes non constants sont les mêmes (heureusement !), et donc qu'on doit avoir $\frac{\sqrt{2}}{l} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, soit $l = \sqrt{2\pi}$, ce qui donne bien l'équivalent souhaité : $n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

9. La véritable valeur de 10! est 3 628 800, la formule de Stirling appliquée pour $n = 10$ donne la valeur approchée $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \simeq 3.599 \times 10^6$, soit une erreur relative d'environ 0.83% (moins d'un pour cent, c'est déjà assez bon). Si on monte jusqu'à $n = 100$, on a $100! \simeq 9.33262 \times 10^{157}$ (oui, c'est bien un nombre à 158 chiffres, c'est gros) et $\sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100} \simeq 9.32485 \times 10^{157}$, soit une erreur relative d'environ 0.08% (dix fois moins que la précédente, le quotient des deux suites converge vers 1 mais pas extrêmement vite). Bien entendu, l'écart absolu entre les deux est absolument énorme, mais vu la taille des nombres eux-même, c'est assez normal.