# Devoir Maison n° 10

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 28 février 2022

Ce devoir est consacré à des calculs incontournables que tout élève de MPSI doit avoir vus au moins une fois dans sa vie. Les deux dernières parties en sont indépendantes, mais utilisent toutes les deux (quoique très partiellement pour la dernière) les calculs de la première partie.

## I. Intégrales de Wallis.

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale de Wallis $W_n$ par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.

1. Calculer les valeurs de $W_0$, $W_1$ et $W_2$.
2. Démontrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
4. Montrer par récurrence que $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(W_n)$, en déduire sa convergence.
6. Déterminer la limite de $\dfrac{W_n}{W_{n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
7. En déduire la formule de Wallis : $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

## II. Le retour d'une somme bien connue.

Dans cette deuxième partie, on va redémontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour cela, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt$.

1. Montrer que, $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$.
2. En déduire que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2})$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{W_{2n}} = 0$.
4. Montrer que $W_{2n+2} = (2n+2) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\ dt$.

5. En déduire que $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$.
6. En déduire que $2\left(\dfrac{u_n}{W_{2n}} - \dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
7. Démontrer enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## III. La formule de Stirling.

On note dans cette dernière partie $v_n = \left(\dfrac{e}{n}\right)^n \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est décroissante (exploiter la question précédente après avoir simplifié $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ est une bonne piste) et en déduire sa convergence. On notera désormais $l$ sa limite.
3. On note $g_k$ la fonction affine vérifiant $g_k(k) = \ln(k)$ et $g_k(k+1) = \ln(k+1)$. Montrer que, $\forall t \in [k, k+1]$, $0 \leqslant \ln(t) - g_k(t) \leqslant (t-k)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k-1}\right)$.
4. En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^n \ln(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1)+\ln(k)}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.
5. En déduire que $\ln\left(\dfrac{n}{e}\right)^n - \ln(n!) + \ln(\sqrt{n}) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.
6. Montrer que la suite $(v_n)$ est minorée par $\sqrt{e}$.
7. En déduire que la limite $l$ de la suite $(v_n)$ ne peut pas être nulle.
8. Déterminer la valeur de $l$ à l'aide de la formule de Wallis, et conclure que la formule de Stirling est vérifiée : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
9. Déterminer l'erreur relative commise en approchant 10!, puis 100! par la formule de Stirling (on a bien sûr le droit d'utiliser le premier Python venu pour calculer les valeurs).