Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 13 septembre 2021

1 Exercice 1 (d'après un vieux sujet de bac)

On considère dans tout le problème la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

A. Étude de la fonction f.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f, et tracer une allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera désormais x_0, et vérifier que $x_0 \in]1, 2[$.
3. On note (D) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
   (a) Déterminer une équation de (D).
   (b) Calculer l'abscisse x_1 du point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses.
   (c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D).
   (d) Comparer les valeurs de x_0 et de x_1.
4. Á l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ dt$.

B. Recherche d'une valeur approchée de x_0.

On pose dans cette deuxième partie $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le sens de variation de g, et montrer que $g\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
2. Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0.9$.
3. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
   (b) On **admet** que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0.9 \times |u_n - x_0|$, montrer que $|u_n - x_0| \leqslant 0.9^n$.
   (c) En déduire la convergence de la suite (u_n) vers x_0.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, x_0 est compris entre u_n et u_{n+1}. Calculer les valeurs de u_n jusqu'à u_5 et en déduire un encadrement de x_0.

2 Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E, on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

1. Montrer qu'on a également $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
2. Montrer que la différence symétrique est une opération associative.
3. Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique : si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, alors $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
4. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'union n'est pas distributive par rapport à la différence symétrique.
5. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A\Delta B = \emptyset$.
6. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A\Delta B = E$.
7. Plus généralement, montrer que l'application $B \mapsto A\Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Quelle est la réciproque de cette application ?