Exercice à travailler n° 13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 janvier 2021

Éléments d'étude de la série harmonique.

1. (a) Une question triviale pour commencer en douceur : $H_{n+1}-H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (H_n) est strictement croissante.

   (b) Commençons par calculer $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette dernière somme est constituée de n termes, et chacun d'entre eux est supérieur ou égal à $\frac{1}{2n}$, donc la somme est bien supérieure ou égale à $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

   (c) La suite étant croissante, si elle était majorée, elle convergerait nécessairement vers une limite l. Mais alors on aurait $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - H_n = l - l = 0$, ce qui est complètement incompatible avec le résultat démontré à la question précédente. La suite ne peut donc pas être majorée, ce qui implique qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. (a) Calculons donc : $u_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $u_2 = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$; $u_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{19}{20}$. La suite (u_n) semble décroissante. De l'autre côté, $v_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$; $v_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, et $v_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$. Cette deuxième suite semble croissante.

   (b) Commençons par étudier la monotonie des deux suites : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+1)+n(2n+2)-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n^2+n+2n^2+2n-4n^2-6n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$ $\frac{-2}{n(2n+2)} < 0$, donc la suite (u_n) est bien décroissante. De l'autre côté, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, donc (v_n) est décroissante.
   Enfin, en effectuant un changement d'indice $j = k + n$ (on peut, n est une valeur fixée), on a $v_n - u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2n}$, qui a certainement une limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

3. (a) La méthode suggérée par l'énoncé consiste à constater que, $\forall x \in [k, k+1]$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (décroissance de la fonction inverse). Comme l'encadrement est valable sur tout l'intervalle, on peut intégrer les inégalités pour écrire $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx$. Les deux intégrales à gauche et à droite sont des intégrales de constates sur un intervalle de largeur 1, elles valent donc respectivement $\dfrac{1}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k}$. Et, bien sûr, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$, dont découle l'encadrement demandé.

Méthode plus rustique : on pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$, la fonction f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)^2} < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante. Or, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ a une limite nulle quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que f est toujours positive.

On recommence ensuite avec $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$, avec cette fois $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2(x+1)} < 0$. Encore une fonction décroissante à limite nulle en $+\infty$ (calcul très similaire au précédent), donc positive sur $]0, +\infty[$.

(b) Si on reprend l'inégalité de droite de l'encadrement précédent et qu'on le somme pour les valeurs de k comprises entre 1 et n, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $\ln(n+1) - \ln(1) \leqslant H_n$ (la somme de gauche est télescopique), c'est bien la première moitié de l'encadrement demandé pour H_n. Pour obtenir la moitié de droite, décalons les indices dans l'inégalité de gauche de l'encadrement de la question a : si $k \geqslant 2$, on peut écrire $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$. Là encore, on va sommer ces inégalités, mais on ne peut le faire qu'à partir de $k = 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$, ce qui donne $H_n - 1 \leqslant \ln(n)$ (il manque le premier terme dans la somme de gauche pour reconnaitre H_n), ce qui implique bien $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

(c) Commençons par étudier les monotonies : $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$ d'après l'inégalité de gauche de l'encadrement de la question a. La suite (a_n) est donc décroissante. De même, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geqslant 0$ (c'est l'inégalité de droite de l'encadrement de la question a, mais décalé d'une unité). La suite (b_n) est donc croissante. Enfin, $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ a une limite nulle. Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent vers une même limite.

(d) En effet, en reprenant le changement d'indice de la question 2.c, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$. Comme on sait que $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$, on peut faire une astuce belge étonnante en écrivant $v_n = H_{2n} - \ln(2n) + \ln(n) - H_n + \ln(2)$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$ (question précédente), et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - \ln(2n) = \gamma$ également. Il ne reste donc plus que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n =$

$\gamma-\gamma+\ln(2)=\ln(2)$. Ce genre de calcul pourra être écrit de façon beaucoup plus naturelle quand nous aurons étudié la négligeabilité et les notations qui vont avec.