Chapitre 20 : Matrices reloaded

PTSI B Lycée Eiffel

12 mai 2020

La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.
Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois
chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision.

MORPHEUS

Dans une soirée, une matrice propose à
une matrice inversible de danser avec elle :
« Ah non, désolée je ne reste pas, je suis de passage ! »

Introduction

Il est temps pour ce dernier chapitre d'algèbre linéaire de l'année de faire le lien entre les espaces vectoriels et le calcul matriciel, qui constitue un puissant outil d'étude, notamment pour les applications linéaires. À tel point d'ailleurs qu'une grande partie de votre programme d'algèbre de deuxième année sera consacrée à la diagonalisation de matrices et à ses applications. Pour cette année, nous nous contenterons de constater qu'une application linéaire entre espaces de dimension finie peut être représentée par une matrice, et que le calcul matriciel (puissances de matrices notamment) s'interprète simplement dans ce cadre.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser les différentes techniques de calcul du rang ou du déterminant d'une matrice.
- comprendre ce que représente la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, et être capable de reconstituer une telle matrice à l'aide de matrices de passages ou de calculs d'images de vecteurs.

1 Matrices d'applications linéaires

1.1 Définitions

L'idée derrière la définition de la matrice représentative d'une application linéaire est toute bête, elle consiste à comprendre qu'on n'a besoin que d'un nombre fini d'informations pour caractériser entièrement l'application en question. Supposons ainsi que $f : E \to F$ est une application linéaire entre un espace vectoriel E de dimension n et un autre espace vectoriel F de dimension p (le fait que les dimensions soient finies est par contre essentiel). Notons $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de l'espace E. Si on connait les images par f de ces n vecteurs, on peut reconstituer l'image de n'importe quel autre vecteur de l'espace E par linéarité (tout vecteur $u \in E$ pouvant s'écrire comme une combinaison linéaire $e = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, on aura simplement $f(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$). Chacune de ces images peut elle-même être décrite dans l'espace F à l'aide de p coordonnées (en exprimant $f(e_1)$, $f(e_2)$, …, $f(e_n)$ dans une base fixée à l'avance de l'espace F), donc de p nombres réels. En prenant « un nombre réel » comme unité d'information, on a donc besoin de $n \times p$ informations pour décrire entièrement l'application f. Mieux, ces $n \times p$ nombres vont naturellement se rapartir en « n groupes de p nombres » (les coordonnées des images de chacun des n vecteurs de la base de E), ce qui rend assez naturelle la représentation de ces nombres sous forme de matrice. Il faut toutefois avoir bien conscience que les nombres qu'on va mettre dans notre matrice dépendent non seulement de l'application f, mais aussi du choix de la base de E et du choix de la base de F. Il n'y a donc pas une seule matrice représentant « naturellement » l'application f, mais une matrice pour chaque couple de bases possibles des deux espaces vectoriels E et F. L'un des enjeux des calculs présentés dans ce chapitre est de comprendre les liens entre les différentes matrices obtenues quand on change ces bases, et de commencer à saisir qu'il existera des choix de bases « plus malins » que d'autres, dans lesquelles la matrice sera plus simple et donc plus maniable si on a besoin de faire des calculs avec (notamment des calculs de puissances). C'est en fait exactement l'objet de la **diagonalisation** que vous étudierez en détail l'an prochain (il s'agit, comme vous l'auriez deviné tout seuls, de trouver des bases dans lesquelles notre matrice va être diagonale).

Définition 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. En considérant une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E, la **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base** $\mathcal{B}$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j ème colonne est composée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : la définition peut paraitre compliquée mais en pratique c'est tout bête, on écrit **en colonnes** les coordonnées des différents vecteurs de la famille. Bien entendu, la matrice obtenue dépendra du choix de la base dans laquelle on va calculer ces coordonnées, mais en pratique on prendra très souvent la base canonique. Par exemple, si on considère la famille $\mathcal{F} = ((1, -1, 2), (2, 0, 1))$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique est simplement la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. De même, si on considère la famille de polynômes $\mathcal{F} = (X^2 - X + 1, 2X + 3, 3X^2 - 2)$, elle a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{R}_2[X]$ (attention à bien mettre les coordonnées dans le bon ordre, rappelons que la base canonique est $(1, X, X^2)$ dans cet ordre !).

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. La **matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** est la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. En effet, les vecteurs de la base canonique de E sont les trois vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, on a donc calculé les trois images $f(1, 0, 0) = (4, -2)$; $f(0, 1, 0) = (-3, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, -5)$ et on a recopié ces vecteurs dans les trois colonnes de la matrice. Alternativement, on peut aussi directement recopier « en ligne » les coefficients se trouvant devant les coordonnées x, y et z dans l'expression de $f(x, y, z)$, mais il faut toujours faire très attention à écrire la matrice « dans le bon sens ».

Remarque 1. Dans le cas d'un endomorphisme, on prendra souvent $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, et on notera simplement la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemple : Prenons une application définie sur un espace vectoriel un peu plus pénible. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM - MA$. On veut calculer la matrice de f dans la base canonique (même base au départ et à l'arrivée ici puisqu'il s'agit d'un endomorphisme). Pour simplifier les choses, posons carrément $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et calculons $AM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$, $MA = \begin{pmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{pmatrix}$ et donc $f(M) = \begin{pmatrix} b+2c & 2d-2a \\ d-a & -b-2c \end{pmatrix}$. En particulier, les images des quatre matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les suivantes : $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Très bien, mais comment fait-on pour créer une matrice avec tout ça ? Eh bien, on prend une matrice quatre lignes quatre colonnes (c'est normal, on travaille dans un espace vectoriel qui est de dimension 4), et on recopie dans chacune des colonnes de cette matrice les quatre coefficients de chaque image calculée ci-dessus (comme s'il s'agissait d'un vecteur et non d'une matrice). On obtient ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1. En gardant les notations précédentes, soit $u \in E$ et $(u_1, \dots, u_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. On va noter $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ la matrice-**colonne** de ses coordonnées, et on notera de même $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de son image $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$ de l'espace vectoriel F. On a alors $f(X) = Y = MX$, où M est la matrice représentant f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Démonstration. En effet, par définition, $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j$ (attention à l'ordre des indices). On a donc $f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i m_{ji} \right) f_j$. Autrement dit, les coefficients de la matrice-colonne Y sont donnés par $y_j = \sum_{i=1}^{n} u_i m_{ji}$. Or, l'unique terme de la j-ème ligne de la matrice colonne MY vaut précisément $\sum_{i=1}^{n} m_{ji} x_i$, ce qui prouve l'égalité demandée. $\square$

Exemple : Cette propriété dit en fait tout simplement que, pour calculer l'image d'un vecteur par une application f à l'aide de la matrice de cette application, il suffit de le multiplier par cette matrice, à condition d'écrire toutes les coordonnées **en colonnes**. Vous aurez maintenant compris que, dans tout ce chapitre, cette écriture des coordonnées en colonnes sera systématique.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors la matrice de λf dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $f + g$ est $M + N$.

Plus intéressant, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives dans des bases cohérentes (la base de F choisie à l'arrivée pour l'application f doit être la même que la base choisie au départ pour l'application g), alors la matrice de $g \circ f$ est NM (exprimée dans une base de E qui sera la même que celle de départ de f, et dans une base de G qui sera la même que celle d'arrivée de g).

Démonstration. En effet, si $f(X) = MX$ et $g(X) = NX$, $\lambda f(X) = \lambda MX$; $f(X) + g(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $g \circ f(X) = g(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $g \circ f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$. Il est bien évidemment essentiel de multiplier les matrices dans le bon sens pour que leur produit corresponde à la matrice de la composée. C'est particulièrement important dans le cas où f et g sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel, cas où on peut effectuer le produit dans les deux sens (l'un d'eux correspondra à la matrice de $g \circ f$ et l'autre à celle de $f \circ g$.

Proposition 3. Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice M dans une base $\mathcal{B}$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans cette même base est M^{-1}.

Démonstration. C'est une application immédiate du dernier point de la proposition précédente : $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, donc en notant N la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, $MN = I$ (la matrice représentative de l'application id, tant qu'on utilise la même base au départ et à l'arrivée, est toujours égale à la matrice identité), ce qui signifie exactement que $N = M^{-1}$. □

Exemple : Une autre application essentielle de la propriété sur les matrices de composées d'applications linéaires est qu'on peut calculer la matrice des « puissances » d'un endomorphisme f^n (rappelons que cette notation désigne en fait une composée de f par elle-même n fois) en élevant simplement à la puissance n la matrice de l'application (ce qui justifie d'ailleurs la notation !). C'est un moyen particulièrement pratique de prouver par exemple qu'un endomorphisme est une projection ou une symétrie : on calcule sa matrice M dans une base de E (n'importe laquelle !), et on vérifie que $M^2 = I$ (pour une symétrie) ou que $M^2 = M$ (pour une projection). Un exemple concret sera donné à la fin du prochain paragraphe.

1.2 Changement de base

Il ne nous reste plus qu'à comprendre une chose fondamentale : comment déterminer la matrice de f dans une autre base $\mathcal{B}'$ si on la connait dans une base $\mathcal{B}$.

Définition 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E, la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note souvent $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$.

Remarque 2. On obtient donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ en notant en colonnes les coordonnées des différents vecteurs de $\mathcal{B}'$, exprimés dans la base $\mathcal{B}$. En pratique, on manipulera souvent des matrices de passage où la base de départ $\mathcal{B}$ est simplement la base canonique de l'espace E (souvent notée *can* dans ce genre de cas). Par exemple, la famille $\mathcal{B} = ((1, 1), (2, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les deux vecteurs qui la constituent ne sont pas proportionnels), et la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ est la matrice $P_{can,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors P est une matrice inversible, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Démonstration. La matrice P peut être vue différemment : il s'agit de la matrice de l'application identité dans les bases $\mathcal{B}'$ (au départ) et $\mathcal{B}$ (à l'arrivée). En effet, les colonnes de P contiennent exactement les coordonnées des vecteurs g_j (qui sont évidemment leurs propres images par l'application identité) dans la base $\mathcal{B}$. Si on note Q la matrice de cette même application identité dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (qui est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$), le produit des deux matrices représentera l'application identité dans la base $\mathcal{B}'$, au départ comme à l'arrivée. Mais cette dernière matrice est évidemment la matrice I, donc $QP = I$, ou encore $Q = P^{-1}$. □

Proposition 5. Soit u un vecteur appartenant à E et $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ (on reprend les notations du paragraphe précédent), et $X' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une seconde base $\mathcal{B}'$. Alors $X = PX'$ (ou $X' = P^{-1}X$), où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Explicitons les hypothèses utiles : $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u'_j g_j$ (en gardant les notations utilisées plus haut pour les vecteurs des deux bases), et $g_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, donc $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} u'_j \right) e_i$. Par unicité de la décomposition dans une base, on peut en déduire que $u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij} u'_j$, soit exactement $X = PX'$. Il faut bien faire attention au sens assez contre-intuitif de la relation énoncée dans cette propriété (on exprime en fait les coordonnées dans l'« ancienne » base en fonction des coordonnées dans la « nouvelle » base, alors que souvent on préfèrerait le contraire. Obtenir X' en fonction de X nécessitera en pratique de calculer un inverse, celui de la matrice de passage. □

Théorème 1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons qu'on dispose des éléments suivants :

- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E ($\mathcal{B}$ est l'« ancienne » base et $\mathcal{B}'$ la « nouvelle »).
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F.
- P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- Q est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.
- M est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (autrement dit, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$).
- M' est la matrice de cette même application f, mais dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ (donc $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$).

Toutes ces matrices sont alors reliées par la relation fondamentale : $M' = Q^{-1}MP$.

Remarque 3. Cette formule est connue sous le nom de « formule de changement de bases pour les matrices d'applications linéaires » puisqu'elle permet en pratique de modifier les bases qu'on utilise pour construire la matrice de l'application f. Pour cela, on « change la base de départ » en multipliant à droite par la matrice de passage P, et on « change la base d'arrivée » en multipliant à gauche par **l'inverse** de la matrice de passage Q. Cette formule est extrêmement souvent utilisée en pratique, par exemple quand on fait de la diagonalisation (dans ce cas, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en général les bases canoniques des espaces E et F, et les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ sont soigneusement choisies pour que la matrice M' devienne diagonale). Un cas particulier essentiel de cette formule se produit quand f est un endomorphisme, et que la base de départ et la base d'arrivée sont identiques. On va d'ailleurs écrire explicitement ce cas qui est en pratique celui que vous exploiterez en permanence.

Théorème 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de l'espace E, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de cet espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Démonstration. Sans expliciter les calculs, on peut exploiter les résultats précédents. Soit X la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{B}'$, alors PX est la matrice de u dans $\mathcal{B}$ (c'est la propriété précédente), puis MPX représente la matrice de $f(u)$ toujours dans la base $\mathcal{B}$, et enfin $P^{-1}MPX$ est la matrice de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Or, NX représente également les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}'$, donc $NX = P^{-1}MPX$. Comme cela est vrai pour tout vecteur u, en particulier pour ceux de la base canonique, les matrices N et $P^{-1}MP$ représentent la même application linéaire dans $\mathcal{B}'$, et sont donc égales. La formule plus générale énoncée auparavant se démontre exactement de la même façon. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et notons $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$. Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$: si $(x,y,z) = a(1,1,-1)+b(1,0,-1)+c(1,-1,0)$, alors $a-c=y$ et $-a-b=z$, donc $-b-c=y+z$. Comme par ailleurs $a+b+c=x$, on trouve en additionnant $a=x+y+z$, puis $c=a-y=x+z$, et $b=-a-z=-x-y-2z$. Autrement dit, la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en calculant directement les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f : $f(1,1,-1) = (1,1,-1)$; $f(1,0,-1) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1)$ et $f(1,-1,0) = (3,-3,0)$, ce qui explique que la matrice soit effectivement diagonale. Nous venons en fait d'effectuer sans le dire notre première diagonalisation de matrices, mais vous attendrez l'an prochain pour en apprendre (beaucoup) plus sur ce sujet.

Remarque 4. Un vecteur non nul u vérifiant $f(u) = \lambda u$ pour un certain réel λ est appelé **vecteur propre** de l'application f, et le réel λ est la **valeur propre** associée à u. Chercher une base dans laquelle la matrice de f devient diagonale revient exactement à chercher une base constituée de vecteurs propres de f. Les techniques générales de recherches de vecteurs propres consistent en fait à chercher d'abord les valeurs propres de l'endomorphisme, qui ne peut pas en avoir plus que la dimension de l'espace E sur lequel l'application est définie.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (2y-z, -x+3y-z, -2x+4y-z)$. La matrice M de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est bien entendu $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Si on calcule A^2, on se rend compte que $A^2 = A$. Ceci prouve que $f \circ f = f$, et donc que f est une projection. Déterminons ses éléments caractéristiques : le noyau de f est obtenu en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$. La première équation donne immédiatement $z = 2y$, si on remplace dans les deux autres on a alors les conditions $-x+y=0$ et $-2x+2y=0$, qui sont manifestement équivalentes. On se contentera donc de dire que $x=y$, donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,1,2))$. Le théorème du rang nous assure alors que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. On peut en obtenir une base en calculant comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique (l'une des trois sera inutile) : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,-1,-2),(2,3,4)(-1,-1,-1))$, ou pour simplifier les choses $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,2),(1,1,1))$. On sait que l'image et le noyau d'un projecteur sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires, donc la famille $\mathcal{B} = ((0,1,2),(1,1,1),(1,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$? Pas le moindre calcul à faire pour la déterminer ici ! En effet, en notant e_1, e_2 et e_3 les vecteurs constituant cette base, on sait déjà que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ (les vecteurs appartenant à l'image d'un projecteur sont invariants), et $f(e_3) = 0$ (celui-ci est dans le noyau), donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En fait, on comprend facilement à partir de cet exemple que, dans une base bien choisie, la matrice représentative d'une projection sera toujours diagonale, avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale (remarquons en passant que ce genre de matrice est trivialement invariante quand on l'élève au carré). En effet, tous les vecteurs du noyau sont vecteurs propres pour la valeur propre 0 (c'est même la définition du noyau) et tous ceux de l'image sont vecteurs propres pour la valeur propre 1.

2 Rang d'une matrice

Définition 4. Le **rang d'une matrice** $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille constituée des vecteurs-colonnes de la matrice M (coordonnées prises par exemple dans la base canonique).

Remarque 5. Autrement dit, le rang de M est le rang de l'application linéaire qu'elle représente dans les bases canoniques (ou dans n'importe quelles autres bases).

Proposition 6. Le rang d'une matrice est toujours le même que celui de sa transposée.

Démonstration. Ce n'est pas évident à démontrer, cela découle en fait des remarques faites plus bas. Notons une conséquence évidente : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$. □

Proposition 7. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Démonstration. En effet, M est de rang n si l'application linéaire associée est de rang n, donc bijective. □

Proposition 8. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Démonstration. C'est assez immédiat si on songe que le rang représente la dimension de l'image de l'application linéaire associée. Un échange de colonnes échange deux images sans rien changer à sa dimension. Un produit par une constante non nulle d'une colonne ne modifie sûrement pas l'espace engendré par le vecteur correspondant. Et remplacer dans une famille génératrice un vecteur par une combinaison linéaire de lui-même et d'autres vecteurs de la famille ne modifie pas non plus la dimension de l'espace vectoriel engendré. Il est plus délicat de comprendre pourquoi le rang n'est pas modifié par opérations sur les lignes, ce qui découle du fait qu'une matrice a toujours le même rang que sa transposée. Nous admettrons cette partie de la preuve. □

Théorème 3. (Hors-programme) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si $M = QJ_rP$, où P et Q sont deux matrices inversibles, et $J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec r fois 1 et $n-r$ fois 0 sur la diagonale.

Démonstration. C'est en fait facile à prouver. Soit f l'application associée à M dans la base canonique. Puisque $\mathrm{rg}(f) = r$, son noyau est de dimension $n-r$. On peut construire une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{r+1}, \dots, e_n) \in \ker(f)^{n-r}$. On sait alors (démonstration du théorème du rang) que $f_{|\,\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)}$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(f)$. En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$

est une famille libre de E, qu'on peut compléter en base. Dans ces deux bases, l'application f a par construction pour matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage idoines (de la base canonique vers la première base pour P, de la deuxième base vers la base canonique pour Q), les formules de changement de base assurent que $M = QJ_rP$. $\square$

Exemple : On peut donc calculer le rang en appliquant une sorte de pivot de Gauss à notre matrice, jusqu'à la transformer en matrice diagonale (et même en J_r). En pratique, on se contente souvent de mélanger opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est évident. Ainsi, $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ en effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_4$.

3 Déterminant

Le déterminant est un outil géométrique servant à étudier la colinéarité de vecteurs dans le plan (vous l'avez d'ailleurs sûrement déjà croisé même si vous ne vous souvenez pas de ce terme de vocabulaire). Mais on peut le généraliser à trois vecteurs dans l'espace (pour caractériser désormais la coplanarité), puis à une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n. Ce déterminant généralisé garde une signification géométrique (en gros, le déterminant sert à calculer des aires et des volumes) mais nous servira surtout pour l'instant à déterminer rapidement si une famille de vecteurs est libre, ou si une matrice est inversible.

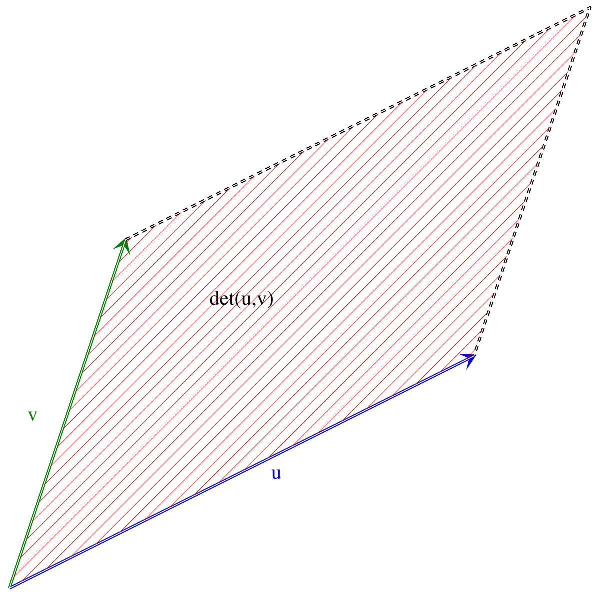
3.1 Déterminant de deux vecteurs du plan

Définition 5. Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan, le **déterminant** de ces deux vecteurs est le nombre réel $\det(u, v) = \|u\| \times \|v\| \times \sin(\alpha)$, où α est l'angle (orienté) formé par les deux vecteurs u et v. On peut aussi le noter $[u, v]$ ou encore $|u \quad v|$, notation cohérente avec le déterminant matriciel que nous définirons plus loin.

Remarque 6. Il s'agit vraiment ici d'une définition purement géométrique, qui suppose qu'on puisse définir correctement la notion d'angle entre deux vecteurs. En fait, cette notion d'angle ne peut exister dans un espace vectoriel quelconque que si on a préalablement fixé un produit scalaire permettant de définir la notion d'orthogonalité. Comme nous n'allons en fait travailler dans cette partie du cours que dans $\mathbb{R}^n$, nous admettrons que les formules que nous allons rapidement utiliser à la place de la définition pour calculer nos déterminants correspondent à la notion intuitive d'angle entre vecteurs de $\mathbb{R}^2$, puis de $\mathbb{R}^3$ (et même de $\mathbb{R}^n$, mais là vous allez m'objecter que la notion intuitive d'angle dans un espace de dimension 12, par exemple, n'existe plus trop). Le fait que l'angle soit orienté signifie simplement que le déterminant de deux vecteurs du plan peut très bien être négatif. Il sera en fait positif uniquement si les deux vecteurs u et v forment (dans cet ordre) ce qu'on appelle généralement une base directe du plan. Nous reviendrons plus en détail sous l'aspect vraiment géométrique de ces définitions dans un chapitre ultérieur consacré à la géométrie plane.

Définition 6. Soient u et v deux vecteurs du plan ayant pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, alors $\det(u, v) = xy' - x'y$.

Remarque 7. Le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v. Cette aire sera négative quand la base (u, v) est indirecte (on utilise donc la valeur absolue du déterminant pour calculer des aires en pratique).



Proposition 9. Deux vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $\det(u,v) = 0$.

Proposition 10. Propriétés fondamentales du déterminant
Le déterminant est :

- bilinéaire : $\det(u, \lambda v + w) = \lambda \det(u,v) + \det(u,w)$ et $\det(\lambda u + v, w) = \lambda \det(u,w) + \det(v,w)$.
- antisymétrique : $\det(u,v) = -\det(v,u)$.
- alterné : $\det(u,u) = 0$.

Remarque 8. Ces trois propriétés (ou plutôt les deux premières car la troisième découle en fait de la deuxième) sont caractéristiques du déterminant au sens où il n'existe en fait (à une multiplication par une constante près) qu'une seule application prenant comme variables deux vecteurs du plan et renvoyant un réel, et vérifiant ces propriétés. Ce sont ces propriétés caractéristiques qui vont permettre de généraliser l'emploi du déterminant en dimension n un peu plus loin.

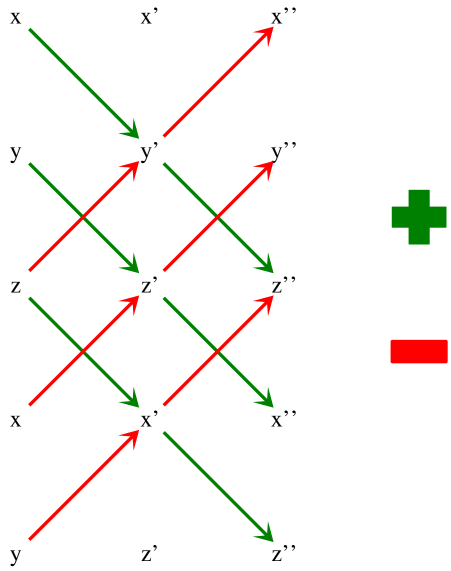
3.2 Déterminant de trois vecteurs de l'espace

Définition 7. Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace, leur **déterminant** (aussi appelé **produit mixte**) est le nombre réel $(u \wedge v).w$. On le note $[u,v,w]$, ou encore $\det(u,v,w)$, ou même $|u \quad v \quad w|$.

Remarque 9. Cette définition est encore plus problématique que celle donnée dans le paragraphe précédent dans la mesure où elle fait intervenir deux outils (produit scalaire et produit vectoriel) que nous n'avons pas encore évoqués en maths cette année. En fait, on peut la remplacer par une définition plus purement géométrique (et donc plus proche de celle donnée dans le plan) où le déterminant est défini comme produit des normes des trois vecteurs par des sinus d'angles bien choisis, mais la définition de ces angles dans l'espace est plus compliquée qu'il n'y parait. Nous allons de toute façon en pratique uniquement exploiter la formule donnée dans la propriété suivante.

Proposition 11. Si u, v et w ont pour coordonnées respectives (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'') dans un repère orthonormal direct de l'espace, alors $\det(u,v,w) = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$.

Méthode : Pour calculer un peu plus rapidement les déterminants (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme suivant (on recopie en colonnes les coordonnées des trois vecteurs, en écrivant une deuxième fois les deux premières coordonnées) :



On additionne les trois produits obtenus les long des diagonales descendantes, et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes. Une façon un peu plus tordue de voir les choses : on écrit les six produits possibles faisant intervenir une variable x, une variable y, une variable z, une variable « sans prime », une variable « avec un prime » et une variable « avec deux primes », et on met un signe plus devant les trois termes où peut lire xyz dans cet ordre de gauche à droite (quitte à boucler pour revenir au début), un signe moins devant ceux où on lira xyz de droite à gauche. Cette façon de faire peut paraitre ridicule mais elle se généralise très bien, contrairement à la règle de Sarrus qui elle ne fonctionne qu'en dimension 3.

Proposition 12. Trois vecteurs u, v et w sont coplanaires si et seulement si $\det(u, v, w) = 0$.

Proposition 13. On retrouve également une interprétation géométrique du déterminant : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs u, v et w.

Proposition 14. Propriétés fondamentales du déterminant
Le déterminant dans $\mathbb{R}^3$ est :
- trilinéaire : $\det(u, v, \lambda w + t) = \lambda \det(u, v, w) + \det(u, v, t)$, et de même pour les deux autres variables.
- antisymétrique : si on échange deux des trois vecteurs dans un déterminant, on change son signe, par exemple $\det(w, v, u) = -\det(u, v, w)$, mais $\det(v, w, u) = \det(u, v, w)$ car on a fait ici deux échanges successifs de deux vecteurs.
- alterné : si deux des trois vecteurs u, v et w sont égaux, alors $\det(u, v, w) = 0$.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

On a en fait déjà défini sans vraiment le signaler le déterminant d'une matrice à deux lignes et deux colonnes. Si on note $u = (a, c)$ et $v = (b, d)$ deux vecteurs du plan, le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est simplement le déterminant des vecteurs u et v, c'est-à-dire le nombre réel $ad - bc$ (ce qui est cohérent avec l'une des notations définies pour le déterminant de deux vecteurs du plan). On peut déjà constater que la condition d'annulation du déterminant (il est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires) correspond à la condition de non inversibilité de M (puisque, si les vecteurs sont colinéaires, M sera de rang au maximum 1 et donc non inversible). C'est en gros cette propriété qu'on veut conserver avec des matrices n lignes n colonnes.

Définition 8. Le déterminant de n vecteurs u_1, u_2, …, u_n de $\mathbb{R}^n$ est l'unique nombre qu'on peut associer à tout n-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de façon à respecter les conditions suivantes :

- le déterminant doit être multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des ses n variables (ainsi, $\det(\lambda u_1 + v, u_2, \dots, u_n) = \lambda \det(u_1, u_2, \dots, u_n) + \det(v, u_2, \dots, u_n)$, mais on aurait le même genre de relation en remplaçant u_2, u_3 ou u_n par une combinaison linéaire.
- le déterminant doit être alterné : si deux des vecteurs parmi u_1, u_2, …, u_n sont égaux, alors $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$.
- le déterminant des n vecteurs de la base canonique (dans l'ordre habituel) est égal à 1.

Remarque 10. En fait il s'agit de définir une notion de volume en dimension n. L'unité de volume est constituée par le « cube » dont les sommets sont obtenus en prenant les extrêmités des vecteurs de la base canonique, et la multilinéarité assure qu'à partir de cette unité, on peut définir un volume cohérent pour n'importe quel parallélépipède de l'espace $\mathbb{R}^n$ (en gros on impose qu'en multipliant un des n côtés du parallélépipède par λ, le volume de l'objet soit multiplié par λ, ce qui est intuitivement cohérent ; bien sûr, si on multiplie **tous** les côtés par λ, on multipliera le volume par λ^n). L'alternance revient simplement à dire qu'un parallélépipède « plat » (c'est-à-dire ici un solide qui peut être inclus dans un espace de dimension $n - 1$) doit avoir un volume nul.

Remarque 11. La troisième propriété classique du déterminant, l'antisymétrie, n'est pas citée ici car elle est en fait équivalente à l'alternance. Supposons en effet que f soit alternée, et soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors par linéarité, $f(\dots, u + v, \dots, u + v, \dots) = f(\dots, u, \dots, u, \dots) + f(\dots, u, \dots, v, \dots) + f(\dots, v, \dots, u, \dots) + f(\dots, v, \dots, v, \dots)$. Or, $f(\dots, u + v, \dots, u + v, \dots) = f(\dots, u, \dots, u, \dots) = f(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$ à cause de l'alternance, et il reste donc $f(\dots, v, \dots, u, \dots) = -f(\dots, u, \dots, v, \dots)$, ce qui prouve bien que f est antisymétrique.

Définition 9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, le **déterminant** de la matrice M est le déterminant de la famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ constituée par les colonnes de la matrice M. On le note $\det(M)$.

Remarque 12. Parler de déterminant d'une matrice qui n'est pas carrée n'a absolument aucun sens.

Démonstration. Pas de preuve de ce résultat trop compliqué à notre niveau. En fait, on peut donner une définition du déterminant qui généralise les formules vues dans les paragraphes précédents en dimensions 2 et 3 (notamment la règle de Sarrus dans ce dernier cas, qui est évidemment valable pour un calcul de déterminant de matrice), mais qui fait intervenir un nombre de termes égal à $n!$ (n'essayez donc pas d'appliquer une pseudo-règle de Sarrus avec seulement six termes pour des matrices à plus de trois lignes et trois colonnes, ça donnera n'importe quoi). Plus précisément, en notant $m_{i,j}$ les coefficients de la matrice M, on aura $\det(M) = \sum \pm \prod_1^n a_{i,\sigma(i)}$, où la somme se fait sur toutes les permutations possibles de l'ensemble d'entiers $\{1, \dots, n\}$ (il y a bien $n!$ permutations possibles sur cet ensemble, donc $n!$ termes dans la somme). Quant au signe à mettre devant chaque terme, il est positif si la permutation peut être obtenue en faisant un nombre pair d'échanges de deux entiers, négatif si ce nombre est impair (par exemple, la permutation qui transforme 1234 et 3412 est « paire » puisqu'on peut l'effectuer en échangeant 1 et 3, puis en échangeant 2 et 4, soit un nombre pair d'échanges ; par contre celle qui transforme 1234 et 2341 est « impaire », on peut par exemple échanger successivement 1 et 2, puis 1 et 3 puis 1 et 4, ce qui fait trois échanges ; bien entendu, le fait qu'on ne puisse pas obtenir cette même permutation avec un nombre pair d'échanges en procédant différemment n'a rien d'évident). Cette définition est hors-programme, et de toute façon inutilisable en pratique. □

Théorème 4. Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Nous ne pouvons évidemment pas faire une démonstration générale de ce résultat fondamental. On peut toutefois s'en sortir pour des matrices d'ordre 2. Considérons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et étudions plusieurs cas :

- si a et c sont nuls tous les deux, la matrice n'est pas inversible, et elle a pour déterminant $0d - 0b = 0$.
- sinon, on applique le pivot de Gauss (quitte à échanger les deux lignes, ce qui ne change que le signe du déterminant et donc pas le fait qu'il soit nul ou non) : $L_2 \leftarrow cL_1 - aL_2$, pour obtenir la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (ce qui est déjà supposé) et $ad - bc \neq 0$, soit $\det(M) \neq 0$.

□

Proposition 15. Propriétés élémentaires du déterminant.

- $\det({}^tM) = \det(M)$
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
- Si M est inversible, $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$

Démonstration. Pas de démonstration. On peut encore une fois vérifier que ça marche en dimension 2 ou même 3, mais difficilement généraliser. Ce qu'il faut retenir c'est en gros que le déterminant se comporte particulièrement bien vis-à-vis des opérations de produit et d'inverse (mais sûrement pas par rapport à la somme !). On peut d'ailleurs généraliser les deux dernières propriétés : pour une matrice inversible, on aura $\det(M^{-k}) = \left(\dfrac{1}{\det(M)}\right)^k$ pour tout entier naturel k. On peut même l'appliquer pour $k = 0$: $\det(M^0) = \det(I_n) = 1$. Il faut par contre vraiment faire attention au fait que multiplier une matrice par λ multiplie son déterminant par λ^n (ce qui doit sembler naturellement si on garde à l'esprit qu'un déterminant est un calcul de volume). En fait, il suffit de multiplier une **colonne** (ou une ligne) de la matrice par λ (sans toucher au reste des coefficients) pour que son déterminant soit multiplié par λ, ce qui fait partie des propriétés citées ci-dessous. □

Remarque 13. Le déterminant d'une matrice diagonale est simplement le produit de ses éléments diagonaux. En fait, c'est aussi le cas pour une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), ce qui justifie les techniques de calcul présentées ci-dessous.

Proposition 16. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :

- l'échange de deux lignes change le signe du déterminant.
- le produit d'une ligne par une constante λ multiplie le déterminant de la matrice par la même constante λ.
- une combinaison du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant de la matrice.

On a exactement les mêmes propriétés pour les opérations sur les colonnes (on pourra combiner les deux sans problème dans un calcul de déterminant).

Remarque 14. Ces propriétés donnent en pratique un algorithme de calcul explicite du déterminant d'une matrice : on effectue un « demi-pivot de Gauss » pour trasformer la matrice en une matrice triangulaire supérieure (ce qui ne va modifier que marginalement le déterminant de la matrice, changements de signes ou produits par des constantes au pire), et on peut alors simplement calculer le déterminant de la matrice obtenue en faisant le produit de ses coefficients diagonaux. En pratique, c'est même encore mieux qu'un pivot de Gauss classique puisqu'on peut à tout moment décider de faire des opérations sur les lignes ou sur les colonnes. Et on dispose en plus d'une dernière technique de calcul décrite ci-dessous, qui permet de tranformer un déterminant de taille n en plusieurs déterminants de taille $n - 1$.

Exemple : On souhaite calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On commence par exemple par effectuer l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, qui ne modifie pas le déterminant. Autrement dit, $\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. On effectue maintenant un développement par rapport à la première ligne : $\det(M) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+1) - 3(-4+3) = -3+3 = 0$ (la matrice M n'est donc pas inversible).

Proposition 17. Développement suivant une ligne d'un déterminant.
$\det(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} m_{ij} D_j$, où D_j désigne le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de la matrice M la ligne numéro i et la colonne numéro j.

Exemple : Si on développe le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ suivant la deuxième ligne, on trouvera $\det(M) = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$. Les plus curieux remarqueront que c'est une façon assez rapide de démontrer la règle de Sarrus. On peut d'ailleurs tout aussi bien obtenir une formule explicite « de type Sarrus » en développant par rapport à sa première ligne une matrice à quatre lignes et quatre colonnes, puis en appliquant Sarrus sur chacun des plus petits déterminants qui vont apparaitre, mais on aura bien comme prévu 24 termes à la fin !

Remarque 15. En pratique, on essaiera d'appliquer cette technique de développement suivant une ligne à une ligne contenant déjà un (ou plusieurs) zéros, ce qui laisse moins de « petits » déterminants à calculer ensuite. Classiquement, les calculs de déterminant se font en fait en deux temps : d'abord une ou plusieurs opérations sur les lignes ou les colonnes pour faire apparaitre rapidement quelques zéros, puis développement suivant une ligne ou une colonne pour terminer le calcul.

Exemple : Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, où a, b et c sont trois réels quelconques, on peut commencer par soustraire la première colonne à chacune des deux autres puis factoriser et enfin développer suivant la dernière ligne : $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & (a-b)c & (a-c)b \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} bc & c & b \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} c & b \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$.

Définition 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, le **déterminant** de l'endomorphisme f est celui de sa matrice représentative M dans n'importe quelle base de E.

Démonstration. Ce déterminant est effectivement indépendant de la base choisie : si M et M' sont deux matrices représentant une même application linéaire, on sait que $M' = P^{-1}MP$, où P est une matrice de passage inversible, donc $\det(M') = \det(P^{-1}) \times \det(M) \times \det(P) = \det(M)$ puisque $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$. □

Remarque 16. Un endomorphisme en dimension finie est bijectif si et seulement son déterminant est non nul. Le déterminant nous fournit donc un outil assez simple d'utilisation pour savoir rapidement si un endomorphisme est bijectif.