Chapitre 23 : Géométrie dans l'espace

PTSI B Lycée Eiffel

15 juin 2020

Rien n'est plus facile à apprendre que la géométrie pour peu qu'on en ait besoin.

Sacha Guitry

Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.

Tagline du film **Alien, le huitième passager**.

Introduction

Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus...

Objectifs du chapitre :

- maîtrise des calculs géométriques dans l'espace, notamment de produit vectoriel et produit mixte
- capacité à calculer des équations d'objets simples

1 Repérage dans l'espace

Puisque ça fonctionne exactement de la même façon que dans le plan, nous ne reprendrons pas toute la présentation sur les vecteurs faite dans notre premier chapitre de géométrie. Les opérations sont de toute façon les mêmes, et la structure d'espace vectorielle est également présente.

1.1 Repérage cartésien

Définition 1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un triplet $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ de réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Remarque 1. Si l'un des trois coefficients, par exemple a, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\vec{v}$ et $\vec{w}$) sont colinéaires. Dans le cas général, $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 2. Une **base** de l'espace est la donnée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires. Un **repère** de l'espace est la donnée d'un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment une base de l'espace. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox), (Oy) et (Oz).

Théorème 1. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base. Tout vecteur de l'espace peut s'écrire de façon unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, où x, y et z sont trois réels appelés **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans l'espace, la troisième coordonnée z est appelée **cote** (sans accent circonflexe sur le o) du vecteur $\vec{u}$.

Définition 3. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère, et M un point de l'espace. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x, y, z)$.

Remarque 2. On peut donc identifier, de façon similaire à ce qu'on a vu dans le plan, l'ensemble des vecteurs (ou des points) de l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels.

Définition 4. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux. Elle est **orthonormale** si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Remarque 3. Comme dans le plan, celà suppose qu'on ait déjà une notion intuitive d'orthogonlité, et donc d'angles dans l'espace. En fait, on devrait d'abord définir le produit scalaire puis en déduire la notion d'orthogonalité.

Définition 5. Une base orthogonale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **directe** si elle vérifie l'une des règles ridicules suivantes : la règle du tire-bouchon (pour les alcoolos), la règle des trois doigts, la règle du petit bonhomme. Citons par exemple cette dernière : en dessinant sur la base un petit bonhomme dont les pieds sont placés sur les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et la tête sur le vecteur $\overrightarrow{k}$, le petit bonhomme doit avoir le pied droit sur $\overrightarrow{i}$ et le pied gauche sur $\overrightarrow{j}$ pour que la base soit directe.

Remarque 4. Il faut bien avoir conscience qu'on ne peut pas définir de sens direct pour les plans dans l'espace. Par exemple, si on considère une base directe, si on regarde le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ « du dessus » (du côté où les cotes sont positives), la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de ce plan parait directe. Mais vue « du dessous », elle semble indirecte.

Pour toute la suite du chapitre, on fixe une bonne fois pour toutes une base orthonormale de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cette hypothèse ne sera pas rappelée dans tous les énoncés, qui pour certains seraient faux dans une base quelconque.

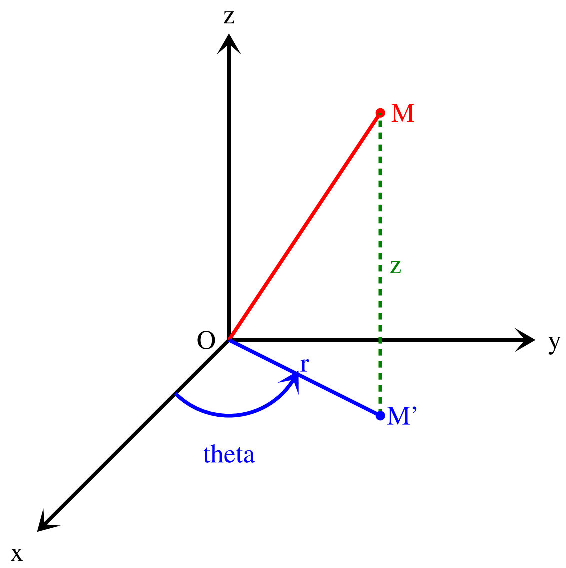
Proposition 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormale, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Par conséquent, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

1.2 Repérage cylindrique

La repérage cylindrique consiste tout simplement à remplacer les deux premières coordonnées cartésiennes x et y par des coordonnées polaires dans le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$, sans toucher à la troisième coordonnée z.

Définition 6. Un point de l'espace M admet pour **coordonnées cylindriques** le triplet (ρ, θ, z) si $\vec{OM} = \rho\vec{u}_\theta + z\vec{k}$, où $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$.

Remarque 5. Les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques, tout comme les coordonnées polaires dans le plan. Attention au fait qu'ici, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ne correspond **pas** à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM', où M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Remarque 6. Il existe un troisième type de repérage « classique » dans l'espace, appelé repérage **sphérique**. C'est en fait un plus proche équivalent que les coordonnées cylindriques du repérage polaire dans le plan, puisqu'on repère alors un point à l'aide d'une distance et de deux angles, et que la distance représente cette fois-ci la distance du point à l'origine. Ce repérage est notamment utilisé pour repérer des points situés sur une sphère centrée à l'origine du repère (d'où le nom de coordonnées sphériques) : puisque la distance à l'origine est alors la même pour tout le monde, il suffit de donner la valeur des deux angles. C'est le principe du repérage des points du globe à partir de la latitude (angle par rapport à l'équateur) et de la longitude (angle par rapport à un méridien fixé, habituellement le méridien de Greenwich). Mais comme les coordonnées sphériques ne sont plus officiellement à votre programme, je m'évite une définition et une figure pénibles en me contentant de les évoquer sans plus de précisions.

2 Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte

2.1 Produit scalaire

Définition 7. Soient $\mathrm{Vect}\,u$ et $\mathrm{Vect}\,v$ deux vecteurs non nuls de l'espace, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le réel $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Remarque 7. Cette définition est rigoureusement identique à celle vue dans le plan, puisqu'on calcule de fait ce produit scalaire dans le plan engendré par les deux vecteurs (en particulier, l'orientation de l'angle formé par les deux vecteurs n'a aucune importance puisque le signe du cosinus sera toujours le même). Tout ce qu'on a pu voir sur le produit scalaire dans le plan va donc rester vrai dans l'espace.

Proposition 2. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Proposition 3. Propriétés du produit scalaire
Le produit scalaire est :

- bilinéaire : $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u}.\vec{v} + \mu\vec{u}.\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w} + \mu\vec{v}.\vec{w}$.
- symétrique : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

- défini positif : $\vec{u}.\vec{u} \geqslant 0$, et $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Proposition 4. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. On va effectuer une preuve très différente de celle vue dans le plan, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la base dans laquelle on travaille est orthonormale. On peut écrire $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$, ce qui vaut en développant tout par la bilinéarité $xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + xz'\vec{i}.\vec{k} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j} + yz'\vec{j}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{i} + zy'\vec{k}.\vec{j} + zz'\vec{k}.\vec{k}$. La base étant orthonormale, $\vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\| = 1$ (et de même pour les deux autres vecteurs), et $\vec{i}.\vec{j} = 0$ (de même pour les autres produits scalaires), il ne reste que $xx' + yy' + zz'$ comme annoncé. □

2.2 Produit vectoriel

Il n'est pas possible de définir un déterminant de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs. Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le déterminant est le produit vectoriel.

Définition 8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base directe, et vérifiant $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, où l'angle dont on prend le sinus est l'angle géométrique entre les deux vecteurs (pour ne pas avoir de problème de signe). On note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \mathrm{Vect}\, 0$.

Proposition 5. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la définition choisie. □

Proposition 6. Propriétés du produit vectoriel.
Le produit vectoriel est :

- bilinéaire : $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\vec{u} \wedge \vec{w}$ et $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{w} + \mu\vec{v} \wedge \vec{w}$.
- antisymétrique : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

Démonstration. L'antisymétrie est assez facile : si on échange le rôle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on ne change pas la norme ni la direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, mais on modifie son sens pour que la base reste directe. La bilinéarité est un peu technique à démontrer dans l'espace, nous admettrons ce résultat. □

Proposition 7. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal direct, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Démonstration. En admettant la bilinéarité du produit vectoriel, on peut effectuer une démonstration similaire à celle du produit scalaire. Il suffit de calculer les produits vectoriels des vecteurs de la base : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; pour les autres, les normes seront toujours égales à 1, et la direction sera toujours celle du troisième vecteur de la base (qui est orthogonal aux deux autres), il suffit donc de faire attention au sens pour que la base soit directe. On obtient $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ mais $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$ etc, ce qui donne bien la formule donnée en développant brutalement. □

Remarque 8. Les formules des coordonnées sont en fait des formules de déterminant où on « oublie » dans les deux vecteurs la coordonnée qu'on est en train de calculer pour le produit vectoriel. Attention tout de même au changement de signe très piégeux pour la deuxième coordonnée !

Exemple : On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel. Par exemple, prenons $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ et $C(0, 2, 4)$. On calcule par exemple $\overrightarrow{AB}(-2, -1, -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$, puis $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1, -6, -1)$. Il ne reste plus qu'à calculer $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \dfrac{\sqrt{1 + 36 + 1}}{2} = \sqrt{\dfrac{19}{2}}$, qui est donc l'aire du triangle spatial ABC.

2.3 Produit mixte

Nous allons simplement rappeler dans ce paragraphe les principaux résultats sur le déterminant, déjà vus dans un précédent chapitre.

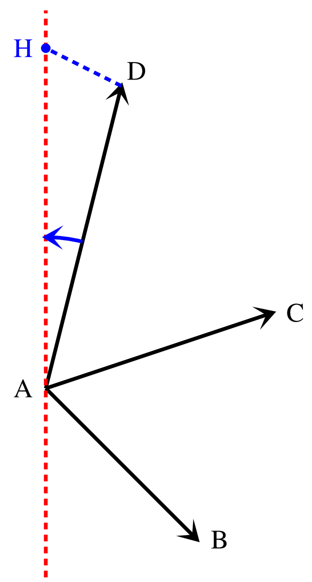
Définition 9. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, leur **produit mixte** (aussi appelé comme dans le plan **déterminant**) est le nombre réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$. On le note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, ou encore $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Proposition 8. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Démonstration. En effet, le produit mixte est nul si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$. cela se produit (outre les cas particuliers évidents de colinéarité) si et seulement si $\vec{w}$ est situé dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. □

Proposition 9. On retrouve ici une interprétation géométrique du produit mixte : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démonstration. Notons A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. D'après les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel, $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \times \|\vec{w}\| \cos(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}})$. La première norme représente l'aire du parallélogramme construit sur les points A, B et C, notons-la $\mathcal{A}$. Le volume recherché vaut $\mathcal{A} \times AH$, où H est le projeté orthogonal de D sur la droite passant par A et perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (AH représente une hauteur du parallélépipède). Or, cette droite est la même que celle dirigeant le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, donc $AH = \|\vec{w}\| \cos(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}})$, ce qui prouve la formule. Dans la figure qui suit, l'angle dont le cosinus apparait dans le formule est indiqué en bleu : □



Proposition 10. Le produit mixte n'étant rien d'autre qu'un déterminnant, toutes les propriétés de ce dernier sont valides : trilinéarité, alternance. Par ailleurs, toutes les techniques de calcul de déterminant (Sarrus, développement par rapport à une ligne ou une colonne) sont utilisables pour les calculs de produits mixtes.

3 Plans, droites et sphères

3.1 Équations de plans

Proposition 11. Équations cartésiennes de plans
Une équation du type $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c et d sont trois réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, est l'équation cartésienne d'un plan. Réciproquement, tout plan admet une équation de cette forme.

Remarque 9. Comme dans le cas des équations de droite dans le plan, l'équation n'est pas unique puisqu'on peut multiplier toute l'équation par une même constante pour décrire le même plan. Attention à ne surtout pas prétendre que ces équations sont des équations de droite, de toute façon une « équation de droite » dans l'espace, ça n'existe pas (il faut nécessairement **deux** équations pour décrire un objet de dimension 1 dans l'espace).

Exemple : Un plan $\mathcal{P}$ est en général défini par trois points distincts A, B et C. Pour en obtenir une équation, le plus simple est de passer par la condition suivante : $M \in \mathcal{P}$ si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = 0$, ou alternativement si $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. Prenons les points $A(2,0,0)$, $B(1,-1,1)$ et $C(0,2,3)$, alors $\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,2,3)$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-5,1,-4)$. Un point $M(x,y,z)$ appartient donc au plan (ABC) si $-5(x-x_A)+(y-y_A)-4(z-z_A)=0$, soit $-5x+y-4z+10=0$. On peut présenter ce même calcul sous forme de calcul de déterminant, ce qui évite d'avoir à faire deux calculs successifs.

Définition 10. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan $\mathcal{P}$ s'ils ne sont pas colinéaires et qu'on peut trouver trois points A, B et C dans le plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal aux deux vecteurs d'une base de $\mathcal{P}$.

Remarque 10. Les vecteurs d'une base d'un plan jouent en quelque sorte le rôle de « vecteurs directeurs » mais on n'utilisera pas ce terme pour un plan car il existe bien sûr une infinité de directions différentes à l'intérieur d'un même plan (on continuera par contre à parler de vecteurs directeurs d'une droite dans l'espace). Le vecteur normal, lui, est toujours unique à un facteur non nul près, c'est d'ailleurs pour cela qu'on privilégiera l'utilisation de vecteurs normaux pour décrire les plans dans l'espace. Dans le calcul de l'exemple précédent la définition, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ était un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

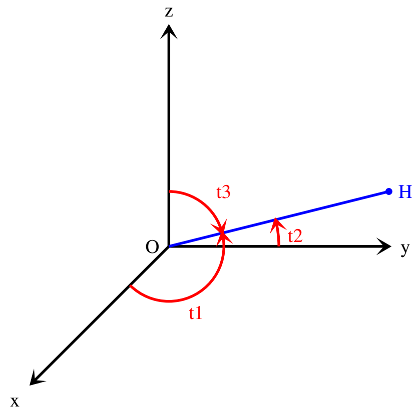
Proposition 12. Un plan ayant pour base $(\vec{u}, \vec{v})$ admet pour vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ pour vecteur normal.

Démonstration. Le fait que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ soit un vecteur normal découle des propriétés du produit vectoriel (il est à la fois orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$). Enfin, si $\mathcal{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, tous les vecteurs $u(\alpha, \vec{\beta}, \gamma)$ de $\vec{P}$ vérifient l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ (en effet, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, avec A et B appartenant à $\mathcal{P}$, on a $ax_A + by_A + cz_A = ax_B + by_B + cz_B = -d$, donc $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0$). Leur produit scalaire avec le vecteur de coordonnées (a,b,c) est donc nul. □

Remarque 11. Le plan passant par le point A et admettant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ a pour équation $a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$.

Proposition 13. Tout plan $\mathcal{P}$ admet une équation **normale** de la forme $x\cos(\theta_1) + y\cos(\theta_2) + z\cos(\theta_3) = p$, où p représente la distance du point O au plan $\mathcal{P}$, et θ_1, θ_2 et θ_3 les trois angles entre les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, H étant le projeté orthogonal de O sur le plan $\mathcal{P}$.

Démonstration. Le plan $\mathcal{P}$ peut être décrit comme le plan passant par H et de vecteur normal unitaire $\dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$. Ce vecteur ayant pour norme 1, a simplement pour coordonnées $(\cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_3))$, donc l'équation du plan sera de la forme $\cos(\theta_1)x + \cos(theta_2)y + \cos(\theta_3)z + d = 0$. Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{OH} = OH \times \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$, le point H a pour coordonnées $(p\cos(\theta_1), p\cos(\theta_2), p\cos(\theta_3))$, et appartient donc au plan à condition que $p(\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3)) + d = 0$, soit $p + d = 0$ (la somme des trois carrés de cosinus représente le carré de la norme du vecteur unitaire, donc est égale à 1), donc $d = -p$, et on trouve l'équation souhaitée. □



Sur cette figure, les trois angles sont notés t_i au lieu de θ_i.

Remarque 12. Pour passer d'une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ à une équation normale, il suffit donc de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Définition 11. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **parallèles** s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. Ils sont **perpendiculaires** s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Remarque 13. Attention, deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

Proposition 14. Si $\mathcal{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, et $\mathcal{Q}$ a pour équation $a'x+b'y+c'z+d'=0$, alors

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires si $aa'+bb'+cc'=0$.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles si $(a,b,c)\wedge(a',b',c')=\vec{0}$.

Définition 12. Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de base $\vec{u}(a,b,c),\vec{v}(a',b',c')$ peut être décrit par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A+at+a't' \\ y & = & y_A+bt+b't' \\ z & = & z_A+ct+c't' \end{array}\right.$, où $(t,t')\in\mathbb{R}^2$.

Démonstration. En effet, un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qu'on peut traduire par l'existence de deux réels t et t' pour lequels $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$, ce qui donne ces équations. $\square$

Exemple : On considère le plan passant par $A(-1,-1,-1)$, et admettant pour base $(\vec{u}(1,2,3),\ \vec{v}(-2,0,1))$. Ce plan a une représentation paramétrique sous la forme $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+t-2t' \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -1+3t+y' \end{array}\right.$. Pour déterminer si le point $B(3,3,4)$ appartient appartient au plan, on cherche si le système $\left\{\begin{array}{rcl} 3 & = & -1+t-2t' \\ 3 & = & -1+2t \\ 4 & = & -1+3t+t' \end{array}\right.$ (système de trois équations à deux inconnues) admet ou non une solution. Ici, la deuxième équation donne immédiatement $t=2$, ce qui donne dans les deux autres $3=1-2t'$ et $4=5+t'$, soit dans les deux cas $t'=-1$. Le système admet donc une (unique) solution, ce qui prouve que B appartient au plan et accessoirement que $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}$.

Proposition 15. Distance d'un point à un plan.
Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point de l'espace, et $\mathcal{P}$ un plan. La distance de M à $\mathcal{P}$ peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$, alors $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d = 0$, alors $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation normale $x\cos(\theta_1)+y\cos(\theta_2)+z\cos(\theta_3) = p$, alors $d(M, \mathcal{P}) = |x_M \cos(\theta_1)+ y_M \cos(\theta_2) + z_M \cos(\theta_3) - p|$.

Remarque 14. Comme dans le cas de la distance d'un point à une droite dans le plan, ces formules sont hélas hors programme. On peut contourner cette difficulté en calculant les coordonnées du projeté orthogonal du point sur le plan (même méthode que dans le plan, ça va assez vite), et simplement utiliser les formules ci-dessus pour vérifier.

3.2 Droites dans l'espace

Proposition 16. Deux plans non parallèles de vecteur normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ont une intersection qui est une droite dirigée par le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Démonstration. En effet, la droite d'intersection doit être à la fois orthogonale à $\vec{n}$ et $\vec{n'}$, ce qui est le cas du vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$. □

Proposition 17. Toute droite de l'espace peut être décrite par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$, où (a, b, c) et (a', b', c') sont des triplets de réels non tous nuls et non proportionnels.

Démonstration. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d) et A un point de (d). Choisissons un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$. La droite (d) peut alors être décrite comme l'intersection des deux plans contenant le point A et de bases respectives $(\vec{u}, \vec{n})$ et $(\vec{u}, \vec{n} \wedge \vec{u})$. Ces deux plans ont, comme tous les plans de l'espace, des équations du type donné dans l'énoncé de la propriété, et admettent respectivement pour vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{n}$, et $\vec{n}$. Ces deux vecteurs normaux étant non colinéaires (ils sont même orthogonaux), les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont non proportionnels. □

Remarque 15. En notant $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n'}(a', b', c')$, la droite (d) sera dirigée par le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$. Cette description d'une droite comme intersection de deux plans n'est pas extrêmement pratique et surtout pas du tout unique (on peut trouver quantité de paires de plans ayant la même droite d'intersection), mais on ne peut pas faire plus simple avec des équations cartésiennes.

Exemple : Soit (d) la droite passant par le point $A(2, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1, 1, 1)$. Une façon d'obtenir un système d'équations cartésiennes de la droite est de dire que $M(x, y, z)$ appartient à (d) si $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, soit $(x - 2, y, z + 1) \wedge (-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ ce qui donne le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & y & - & z & - & 1 & = & 0 \\ -x & & & - & z & + & 1 & = & 0 \\ x & + & y & & & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$. Il y a une équation « de trop » dans le système, mais on constate qu'en soustrayant les deux premières équations, on retombe sur la troisième, qui est donc superflue (ce sera toujours le cas si on utilise cette méthode). On peut en fait garder deux quelconques des trois équations pour obtenir un système d'équations décrivant (d).

Définition 13. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles ont les mêmes vecteurs directeurs.
Deux droites de l'espace sont orthogonales si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux. Elles sont perpendiculaires si elles ont en plus un point d'intersection.

Une droite (d) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ s'il existe une droite incluse dans $\mathcal{P}$ parallèle à (d).
Une droite (d) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toute droite incluse dans $\mathcal{P}$.

Remarque 16. Attention, dans l'espace, deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont aucune raison de se couper (ce sera même très rare). Par contre, une droite et un plan qui ne sont pas parallèles auront un unique point d'intersection. Parmi les théorèmes classiques faisant intervenir les notions de parallélisme dans l'espace (que nous ne rappellerons pas tout), citons le classique textbfthéorème du toit : deux plans distincts de l'espace contenant des droites parallèles ont une intersection qui est elle-même parallèle à ces droites.

Proposition 18. La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ peut être décrite par le système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & x_A & + & \alpha t \\ y & = & y_A & + & \beta t \\ z & = & z_A & + & \gamma t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 19. (Hors Programme) Soient (d) et (d') deux droites de l'espace non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. Il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire simultanément aux droites (d) et (d'). Cette droite est dirigée par le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{u'}$.

Démonstration. Commençons par prouver l'existence. Pour cela, on note $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, et A, A' deux points quelconques situés respectivement sur (d) et sur (d'). Notons alors $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de base $(\vec{u}, \vec{v})$, et $\mathcal{P}'$ le plan passant par A' de base $(\vec{u'}, \vec{v})$. Ces deux plans ne peuvent pas être parallèles : s'ils admettaient un même vecteur normal, celui-ci serait orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{u'}$, donc serait colinéaire à $\vec{v}$, et ne pourrait donc lui être en même temps orthogonal. Leur intersection est donc une droite (Δ), qui est par construction dirigée par le vecteur $\vec{v}$ puisque celui-ci est commun aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Cette direction étant orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{u'}$, (Δ) est orthogonale à (d) et à (d'). Comme par ailleurs (Δ) et (d) sont coplanaires (dans $\mathcal{P}$), elles sont perpendiculaires. De même pour (Δ) et (d').
Passons à l'unicité : si une droite est à la fois perpendiculaire à (d) et (d'), elle est nécessairement dirigée par un vecteur à la fois orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u'}$, donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur convenable. Par ailleurs, elle doit être sécante à la droite (d), donc notre droite appartient au plan $\mathcal{P}$ (elle contient un point du plan et est dirigée par un vecteur de base du plan). De même, elle appartient à $\mathcal{P}'$. Conclusion : il ne peut s'agir que de la droite (Δ). □

Remarque 17. Cette démonstration constitue en fait une méthode pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites : on détermine $\vec{v}$, puis les équations des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et on obtient ainsi l'équation de leur intersection.

Proposition 20. Soient (d) et (d') deux droites non parallèles, passant respectivement par les points A et A', et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. La distance entre (d) et (d') est donnée par la formule $d(d, d') = \dfrac{|[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|}$.

Démonstration. Notons (Δ) la perpendiculaire commune aux deux droites, et H et H' les intersection respectives de (Δ) avec (d) et (d'). La distance recherchée est la distance HH' (si ça ne vous semble pas clair, réfléchissez un peu plus et appliquez ce bon vieux Pythagore). Or, $|[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AA'}]| = (\vec{u} \wedge \vec{u'}).(\overrightarrow{AA'}) = (\vec{u} \wedge \vec{u'}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'})$. Or, le vecteur $(\vec{u} \wedge \vec{u'})$ est orthogonal à (d) et à (d'), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{H'A'}$ est nul. Ne reste plus que $(\vec{u} \wedge \vec{u'}).\overrightarrow{HH'} = \|\vec{u} \wedge \vec{u'}\| \times HH'$ (cette fois-ci, les vecteurs sont colinéaires, puisqu'on sait que Δ est dirigée par $(\vec{u} \wedge \vec{u'})$). La formule en découle. □

3.3 Équations de sphères

Définition 14. Équation cartésienne de sphère.

Dans un repère orthonormal, la sphère de centre $A(a,b,c)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz-d=0$ avec $a^2+b^2+c^2+d \geqslant 0$ est une équation de sphère de centre $A(a,b)$ et de rayon $R=\sqrt{d+a^2+b^2+c^2}$.

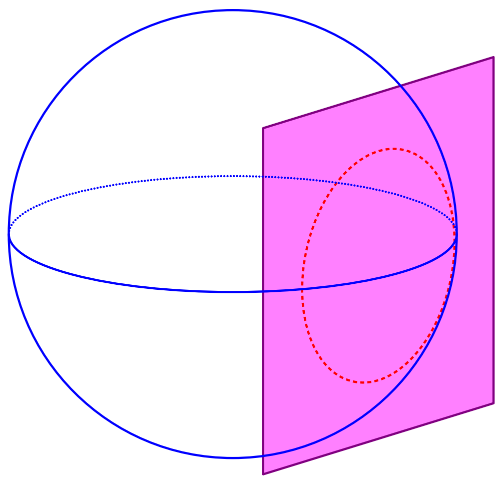
Exemple : L'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2z-4=0$ peut se factoriser sous la forme $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$, on reconnait la sphère de centre $A(2,0,-1)$ et de rayon 3.

Remarque 18. Il est par contre très délicat de décrire un cercle dans l'espace. En fait, le moyen le plus simple est de le décrire « à l'intérieur d'un plan », ou de le voir comme intersection d'une sphère et d'un plan (comme tout objet de dimension 1, il ne peut être décrit par une seule équation, il en faut deux).

Proposition 21. La sphère de diamètre $[AB]$ admet pour équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$.

Démonstration. Un point M appartient à cette sphère si et seulement si $\vec{MA}.\vec{MB}=0$, la démonstration est la même que pour le cercle dans le plan. □

Proposition 22. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :
- si $d(A,\mathcal{P})>R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ne se coupent pas.
- si $d(A,\mathcal{P})=R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en un point unique, le plan $\mathcal{P}$ est **tangent** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A,\mathcal{P})<R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ont une intersection qui est un cercle dont le centre est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.



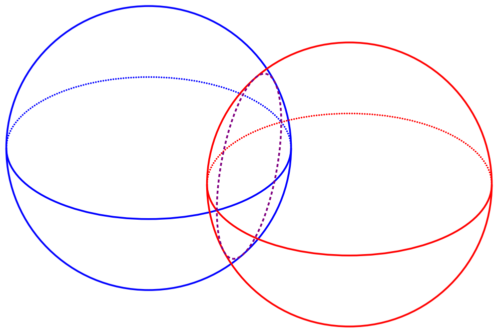
Remarque 19. Comme on ne sait pas décrire facilement un cercle dans l'espace, tout cela reste assez théorique.

Proposition 23. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et (d) une droite de l'espace. Alors :
- si $d(A,d)>R$, $\mathcal{S}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A,d)=R$, $\mathcal{S}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A,d)<R$, $\mathcal{S}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Si on souhaite déterminer les points d'intersection de la sphère décrite ci-dessus (équation $x^2+y^2+z^2-4x+2z-4=0$) avec la droite décrite par le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2 & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & + & 4 & = & 0 \end{array}\right.$, on peut exprimer à l'aide de l'équation de la droite les deux variables y et z en fonction de x (ici, c'est le plus facile, en général, il faut ne garder qu'une variable sur les trois) : en additionnant les deux équations, $4x + 2z + 6 = 0$, donc $z = -3 - 2x$; en les soustrayant $2x - 2y + 2 = 0$, donc $y = x + 1$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation de la sphère pour obtenir une équation du second degré vérifiée par x : $x^2 + (x+1)^2 + (-3-2x)^2 - 4x - 6 - 4x - 4 = 0$, soit $6x^2 + 6x = 0$. On obtient les deux racines évidentes $x = 0$ et $x = -1$, qui donnent ensuite, en calculant les valeurs de y et z correspondantes, les deux points d'intersection $B(0, 1, -3)$ et $C(-1, 0, -1)$.

Proposition 24. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

- si $AA' > R + R'$, les deux sphères ne se coupent pas.
- si $AA' = R + R'$, les deux sphères sont tangentes extérieurement.
- si $|R - R'| < AA' < R + R'$, les deux sphères se coupent en deux points distincts.
- si $AA' = |R - R'|$, les deux sphères sont tangentes intérieurement.
- si $AA' < |R - R'|$, les deux sphères ne se coupent pas.



4 Compléments divers.

Petit formulaire de géométrie dans l'espace.

Comme pour la géométrie plane, il est préférable d'avoir dans son arsenal technique quelques formules de calculs d'aires et de volumes de solides classiques.

- volume d'un parallélépipède rectangle : $l \times L \times h$, où l, L et h sont les trois dimensions du pavé.
- volume d'un cylindre : $\pi R^2 h$, où h est la hauteur du triangle et R le rayon de sa base.
- volume d'un prisme : $\mathcal{B} \times h$, où h est la hauteur du prisme et $\mathcal{B}$ l'aire de sa base (peu importe la forme de cette base), c'est en fait la même formule que pour un cylindre.
- volume d'une pyramide ou d'un cône : $\frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où h est la hauteur et $\mathcal{B}$ l'aire de la base (une pyramide à base triangulaire $ABCD$ a donc un volume égal au **sixième** de celui du parallélépipède basé sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, on peut donc calculer ce volume directement en calculant $\frac{1}{6}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$).
- volume d'une boule de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- aire extérieure d'une sphère : $4\pi R^2$, où R est le rayon de la sphère.

Polyèdres réguliers et un peu moins réguliers.

Un polyèdre est un solide fermé dont les faces sont toutes des polygones (c'est de fait la généralisation dans l'espace de ce que sont les polygones dans le plan). Il existe un certain nombre de catégories de polyèdres remarquables. Les plus importants (et les seuls que vous devriez connaitre) sont les polyèdres réguliers, aussi appelés **solides de Platon** car le philosophe Platon, matheux à ses heures perdues, en a dressé la liste et associé à ces solides une symbolique particulièrement fumeuse (ils symbolisaient les quatre éléments, feu, air, eau et terre, et le cinquième était carrément un symbole de l'univers).

Définition 15. Un polyèdre est **régulier** si toutes ses faces sont des polygones réguliers ayant le même nombre de côtés, et tous ses sommets appartiennent au même nombre d'arêtes.

Théorème 2. Il n'existe que cinq types de polyèdres réguliers dans l'espace :
- le tétraèdre régulier, constitué de quatre faces qui sont des triangles équilatéraux.
- le cube, constitué de six faces carrées.
- l'octaèdre régulier, constitué de huit faces triangulaires (en forme de diamant, on peut l'obtenir en collant par leur base deux pyramides à base carrée).
- le dodécaèdre régulier, constitué de douze faces pentagonales.
- l'icosaèdre régulier, constité de vingt faces triangulaires.

Remarque 20. Dans le plan, il existe par contre des polygones réguliers à n côtés quelle que soit la valeur de n. Que se passe-t-il si on essaie de généraliser à des espaces de dimension supérieure à 3 ? Eh bien, il existe six « super polyèdres réguliers » en dimension 4 (les généralisations des cinq solides de Platon, plus une sixième horreur qui n'a pas d'équivalent en dimension 3), mais il n'en existe plus que trois à partir de la dimension 5 (qui sont les généralisations naturelles du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre). Les plus curieux se renseigneront par eux-même, on appelle ces drôles d'objets des polytopes réguliers.

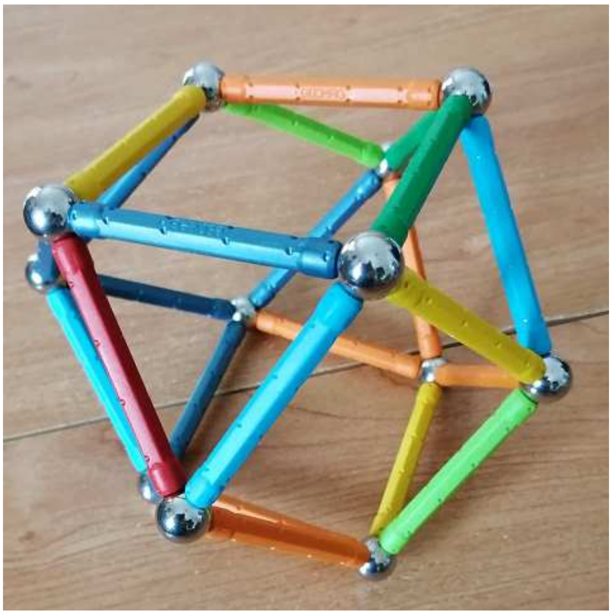
Théorème 3. Si on note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces d'un polydère régulier, alors on a toujours $S - A + F = 2$. Cette propriété est en fait vraie pour n'importe quel polyèdre « non troué » (les plus curieux se renseigneront sur la **caractéristique d'Euler-Poincaré** sur Internet).

Définition 16. En partant d'un polyèdre, on construit son **dual** de la façon suivante : on place un sommet au centre de chacune des faces du polyèdre initial, et on relie chacun de ces nouveaux sommets aux sommets situés sur des faces qui ont une arête commune avec la face contenant ce sommet.

Cette construction crée un nouveau polyèdre dont le nombre de faces est égal au nombre de sommets du polyèdre initial, son nombre de sommets égal au nombre de faces du polyèdre initial, et le nombre d'arêtes reste inchangé. Le dual d'un polyèdre régulier est lui-même régulier : le dual d'un tétraèdre est toujours un tétraèdre, cube et octogone sont duaux l'un de l'autre, et dodécaèdre et icosaèdre également.

Définition 17. Un polyèdre est **semi-régulier** si toutes ses faces sont des polygones réguliers, et tous ses sommets appartiennent au même nombre d'arêtes. La seule différence par rapport aux polyèdres réguliers est qu'on aura plusieurs types de polygones différents pour les faces. On appelle aussi ces polyedres **solides d'Archimède**. Il en existe exactement treize types aux noms particulièrement savoureux, comme le petit rhombicosidodécaèdre qui est constitué de 20 faces triangulaires, 30 faces carrées et 12 faces pentagonales (belle bête).

Je vous laisse aller admirer par vous-même sur Internet ces sympathiques bestioles. Tant que vous y êtes, vous pouvez jeter un oeil aux 13 **solides de Catalan**, qui ne sont rien d'autre que les solides duaux des solides d'Archimède. Par exemple, le dual du petit rhombicosidodécaèdre cité ci-dessus porte le doux nom de hexacontaèdre trapézoïdal. Ci-dessous un cuboctaèdre en Geomag$^{\mathrm{TM}}$ réalisé par Raphaël, 10 ans (ça c'est pour vous mettre la honte si vous n'arrivez pas à en faire un patron correct) :



Et si vraiment vous n'en avez pas encore eu assez, on peut finir avec la plus belle liste de toutes, celle des **solides de Johnson**, qui sont tout bêtement tous les autres solides dont toutes les faces sont des polygones réguliers, mais qui ne vérifient pas la condition « tous les sommets appartiennent au même nombre d'arêtes ». Il en existe des types très simples, comme la pyramide à base carrée (un carré, quatre triangles équilatéraux, le sommet « à la pointe » appartient à quatre arêtes, les les autres à trois seulement), mais avec un peu de motivation, on arrive à prouver qu'il en existe exactement 92 types qui sont par exemple tous listés sur Wikipedia. Par exemple, le dodécaèdre tronque parabiaugmenté a pas moins de 52 faces : 30 triangles équilatéraux, 10 carrés, 2 pentagones et 10 décagones ! Curieusement, aucun de ces solides n'admet de face contenant strictement plus de 10 côtés.