Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 18 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 avril 2020

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro (en soustrayant la mise de départ). On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\dfrac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\dfrac{3 \times 5}{216} = \dfrac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\dfrac{3 \times 5^2}{216} = \dfrac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\dfrac{5^3}{216} = \dfrac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $E(X) = \dfrac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\dfrac{17}{216} \simeq -0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \dfrac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \dfrac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{269}{216} - \left(\dfrac{17}{216}\right)^2 = \dfrac{57\,815}{46\,656} \simeq 1.24$ (soit $\sigma \simeq 1.11$).

Exercice 2 (* à **)

1. Pour déterminer la loi de X_1, peu importe l'ordre dans lequel on a effectué les trois premiers tirages. On peut donc considérer qu'on a tiré simultanément trois boules parmi les six de l'urne, ce qui fait au total $\dbinom{6}{3} = 20$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, un seul ne laisse aucune boule numéro 1 dans l'urne (il faut évidemment tirer les trois boules numéro 1). Symétriquement, un seul laisse trois boules numéros 1 dans l'urne. Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, soit $\dbinom{3}{2} \times \dbinom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$. Le nombre de tirages donnant $X_1 = 2$ vaut également 9 (la situation est en fait symétrique). Soit une loi pour X_1 donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

On calcule ensuite $E(X_1) = \dfrac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \dfrac{3}{2}$; puis $E(X_1^2) = \dfrac{1 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{20} = \dfrac{54}{20} = \dfrac{27}{10}$ et $V(X_1) = \dfrac{27}{10} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{20}$.

2. Au minimum, il faudra trois tirages pour ne plus avoir de boules 1. Au pire, il en faudra bien sûr six. Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu plus haut que cela se produisait avec probabilité $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\dfrac{9}{20}$, comme vu à la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit finalement $P(X_2 = 4) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{20}$. De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages (proba $\dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$) puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes, soit globalement $P(X_2 = 5) = \dfrac{3}{10}$. Enfin, on obtient par soustraction ou par un raisonnement direct, $P(X_2 = 6) = \dfrac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1). Finalement :

k	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

On peut alors calculer $E(X_2) = \dfrac{3 + 12 + 30 + 60}{20} = \dfrac{105}{20} = \dfrac{21}{4}$; puis $E(X_2^2) = \dfrac{9 + 48 + 150 + 360}{20} = \dfrac{567}{20}$, soit $V(X) = \dfrac{567}{20} - \dfrac{441}{16} = \dfrac{63}{80}$.

3. Enfin du facile, X_3 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\dfrac{1}{6}$ chacune (si vous n'êtes pas convaincus, un peu de formule des probabilités composées devrait suffire à refaire les calculs).

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sans difficulté ici, $E(X_3) = \dfrac{7}{2}$; $E(X_3^2) = \dfrac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \dfrac{91}{6}$, soit $V(X_3) = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{35}{6}$.

4. On peut obtenir au minimum une somme de 3 en trois tirages, au maximum une somme de 7. Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, on finit par savoir que la probabilité correspondante vaut $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $\dbinom{3}{2} \times \dbinom{2}{1} = 6$ tirages possibles (toujours sur 20 au total, bien entendu). Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 (trois possibilités), ou bien un 1 et les deux 2 (encore trois possibilités). Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 (encore six possibilités), et il reste une unique possibilité pour le 7.

k	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Soit $E(X_4) = 5$ (la loi est symétrique) ; $E(X_4^2) = \dfrac{9 + 96 + 150 + 216 + 49}{20} = \dfrac{520}{20} = 26$ puis $V(X_4) = 26 - 25 = 1$.

5. Au mieux, la somme atteindra 5 en deux tirages (un 3 et un 2). Au pire, ce sera au quatrième tirage (après avoir tiré trois 1, on sera obligé de tirer au moins un 2 lors du quatrième tirage). La probabilité de n'avoir besoin que de deux tirages est $\frac{2}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$; au contraire, pour aller jusqu'à 4, il faut soit tirer les trois 1 lors des trois premiers tirages, ce qui fait une proba de $\frac{1}{20}$; soit tirer deux 1 et un 2 lors des trois premiers tirages, probabilité $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20}$. Finalement, $P(X_5 = 4) = \frac{7}{20}$. Par soustraction, il reste $P(X_5 = 3) = \frac{31}{60}$.

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{7}{20}$

Soit $E(X_5) = \frac{16 + 93 + 84}{60} = \frac{193}{60}$; $E(X_5^2) = \frac{32 + 279 + 336}{60} = \frac{647}{60}$ et $V(X_5) = \frac{1\ 571}{3\ 600}$.

Exercice 3 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(10, 0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \frac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 4 (*)

1. Il s'agit d'un exemple standard de loi binomiale de paramètre $\left(6; \frac{2}{3}\right)$. On a donc $P(R = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3^{n-k}} = \binom{6}{k}\frac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. De même, la variable V suit une loi binomiale de paramètre $\left(6, \frac{1}{3}\right)$, donc $E(V) = 2$ et $V(V) = \frac{4}{3}$.
2. Sans remise, on est obligés de tirer une boule rouge au moins, donc $R(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Par ailleurs, l'événement $R = k$ est réalisé si on tire k boules rouges parmi les 10 et $6 - k$ boules vertes parmi les 5, donc $P(R = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}}$. Un peu de calcul à la main (ou à la calculatrice pour les plus paresseux) permet d'obtenir $\binom{15}{6} = 5\ 005$, et que les coefficients $\binom{10}{k}$ valent respectivement 10, 45, 120, 210, 252 et 210 quand k varie entre 1 et 6, et que pour ces mêmes valeurs, $\binom{5}{6-k}$ vaut 1, 5, 10, 10, 5 et 1. On peut donc dresser le magnifique tableau suivant pour la loi de R (on n'a volontairement pas simplifié les fractions) :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{10}{5\ 005}$	$\frac{225}{5\ 005}$	$\frac{1\ 200}{5\ 005}$	$\frac{2\ 100}{5\ 005}$	$\frac{1\ 260}{5\ 005}$	$\frac{210}{5\ 005}$

On en déduit que $E(R) = \frac{10 + 450 + 3\ 600 + 8\ 400 + 6\ 300 + 1\ 260}{5\ 005} = \frac{20\ 020}{5\ 005} = 4$. Belle simplification. On continue donc : $E(R^2) = \frac{10 + 900 + 10\ 800 + 33\ 600 + 31\ 500 + 7\ 560}{5\ 005} = \frac{84\ 370}{5005} = \frac{118}{7}$, puis $V(R) = \frac{118}{7} - 16 = \frac{6}{7}$. On peut s'étonner d'obtenir des résultats aussi simples, mais c'est normal puisque ce genre de variable suit une loi classique appelée loi hypergéométrique, mais dont l'étude n'est pas à votre programme.

N'oublions tout de même pas la variable V. Inutile de refaire les calculs, il suffit de se rendre compte que $V + R = 6$, donc $V = 6 - R$. On en déduit que $V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et $P(V = k) = P(R = 6 - k) = \dfrac{\binom{10}{6-k} \times \binom{5}{k}}{\binom{15}{6}}$. On aura, d'après les propriétés de l'espérance et de la variance, $E(V) = 6 - E(R) = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.

Exercice 5 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \dfrac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \dfrac{5^4}{6^4} = \dfrac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \dfrac{4^4}{6^4} = \dfrac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \dfrac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \dfrac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \dfrac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X = 6) = P(A_6) - P(A_5) = \dfrac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \dfrac{671}{1\ 296}$, $P(X = 5) = P(A_5) - P(A_4) = \dfrac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \dfrac{1 + 30 + 195 + 700 + 1\ 845 + 4\ 026}{1\ 296} = \dfrac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \dfrac{1 + 60 + 585 + 2\ 800 + 9\ 225 + 24\ 156}{1\ 296} = \dfrac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Exercice 6 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n ; $n - 1$; $\dots$; 4 ; 3 ; 1 ; 2), donc $X(\Omega) = \{2; \dots; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grand que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X = 2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X = 3) = \dfrac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\dfrac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X = 2) = \dfrac{10 \times 3!}{120} = \dfrac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X=3) = \dfrac{4\times 3! + 8\times 2!}{120} = \dfrac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X=4) = \dfrac{6\times 2! + 3}{120} = \dfrac{1}{8}$. Enfin, on aura $X = 5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X=5) = \dfrac{5}{120} = \dfrac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X) = 2\times\dfrac{1}{2} + 3\times\dfrac{1}{3} + 4\times\dfrac{1}{8} + 5\times\dfrac{1}{24} = \dfrac{65}{24} \simeq 2.71$.

Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X = k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X = 4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\dbinom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X=k) = \dfrac{\dbinom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!} = \dfrac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k = n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X=n) = \dfrac{\dbinom{n}{n}(n-1)0! + 1}{n!} = \dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{k!} + n\times\frac{n}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{1}{k!} + \frac{n^2}{n!}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X) = e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 7 (**)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\dfrac{N}{n}; 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\dfrac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\dfrac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \dfrac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \dfrac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $100 + 1\ 000(1 - 0.99^{10}) \simeq 196$. Il est donc nettement plus avantageux de regrouper les tests !

Exercice 8 (*)

1. Puisqu'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n-k} \times \frac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 9 (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1; 2; \dots; min(n, N)\}$.
2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times (2^n - 2)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n = 2) = \frac{N(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^n}$.

   Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$. Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n = n) = 0$.
4. Les évènements $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{i=n} P(T_n = i) P_{T_n = i}(T_{n+1})$. Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$) ; soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N - (k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.

5. (a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) = 1$.

(b) Calculons : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G'_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G'_n(1)$.

(c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :

$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right) x^k$

$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$

$= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$

$= \frac{x}{N}G'_n(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$

$= \frac{x}{N}G'_n(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

(d) Dérivons donc : $G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G'_n(x) + \frac{1}{N}(x - x^2)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.

(e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right) x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N}u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.

Exercice 10 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit

$X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n-1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.

4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l-k$ au second tour, autrement dit que $X = k$ et $Y = l-k$. On a donc bien $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P((X = k) \cap (Y = l-k))$.
5. On sait que $X = k$, il y a donc $n-k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y = h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n-k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0; 1; \dots; n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h} p^h(1-p)^{n-k-h}$.
On a donc $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X = k)P_{X=k}(Y = l-k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{l-k} p^{l-k} q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} p^l q^{2n-k-l}$.
6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
$P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k} p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^{k=l} \binom{l}{k} q^{l-k} = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z = l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.
8. La probabilité qu'un correspondant donné ne soit joint ni au premier, ni au deuxième tour vaut q^2, donc celle qu'on le joigne à un tour ou à l'autre est de $1-q^2$. Comme on répète cette expérience sur chacun des n correspondants, on est bien dans une situation de loi binômiale de paramètre $(n, 1-q^2)$.

Exercice 11 (***)

1. (a) Calculons donc : $(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k - nq^n = 1 - nq^n + \frac{1-q^n}{1-q} - 1 = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n$. En particulier, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \frac{2}{1-2}\left(\frac{1-2^n}{1-2} - n2^n\right) = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.
   (b) Puisqu'on nous donne gentiment la formule, démontrons-là par récurrence. Au rang 1, la somme vaut 2, et le membre de droite $2 \times 4 - 6 = 2$, donc ça va. Supposons la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k + (n+1)^2 2^{n+1} = (n^2-2n+3)2^{n+1} - 6 + (n+1)^2 2^{n+1} =$

$(n^2-2n+3+n^2+2n+1)2^{n+1}-6=(2n^2+4)2^{n+1}-6=(n^2+2)2^{n+2}-6$. Il ne reste plus qu'à constater que $(n+1)^2-2(n+1)+3=n^2+2n+1-2n-2+3=n^2+2$ pour prouver la formule au rang $n+1$ et achever la récurrence.

2. (a) Il faut commencer par compter le nombre total de boules dans l'urne : $2+\sum_{k=1}^{n}2^k = 2+\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-1=1+2^{n+1}-1=2^{n+1}$. On a donc logiquement $P(X=0)=\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$, et pour tour $k\geqslant 1$, $P(X=k)=\frac{2^k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1-k}}$.

   (b) Calculons donc l'espérance, en oublions la valeur particulière 0 qui n'intervient de toute façon pas dans le calcul : $E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k2^k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2)=n-1+\frac{1}{2^n}$. Pour la variance, on va avoir besoin de $E(X^2)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}k^22^k = n^2-2n+3-\frac{6}{2^{n+1}}$. Ensuite, on applique bien sûr la formule de König-Huygens : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=n^2-2n+3-\left(n-1+\frac{1}{2^n}\right)^2=n^2-2n+3-n^2+2n-1-\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}=2+\frac{1-n}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}$.

3. (a) Si $k=0$, alors $P_{X=0}(Y=0)=1$ et $P_{X=0}(Y=i)=0$ si $i\neq 0$. Plus généralement, $P_{X=k}(Y=i)=0$ si $i\geqslant k$ puisque les boules correspondantes ont été supprimées. Par contre, si $0<i<k$, $P_{X=k}(Y=i)=\frac{2^i}{2^k}=\frac{1}{2^{k-i}}$. Dernier cas, si $k\neq 0$, $P_{X=k}(Y=0)=\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

   (b) On peut appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements constitué des $X=k$. On obtient alors $P(Y=0)=P(X=0)\times P_{X=0}(Y=0)+\sum_{k=1}^{n}P(X=k)\times P_{X=k}(Y=0)=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^{n+1}}\times\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$. De même, si $i\neq 0$, $P(Y=i)=\sum_{k=i+1}^{n}P(X=k)\times P_{X=k}(Y=i)=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{2^k}{2^{n+1}}\times\frac{2^i}{2^k}=\frac{(n-i)2^i}{2^{n+1}}=(n-i)2^{i-n-1}$.

   (c) Vérifions : $\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)2^{i-n-1}=\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{2^{n-i+1}}=\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^{i+1}}=\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^{i-1}}=\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n+1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{2}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}=1$. Ouf, ça marche !

   (d) Allez, un dernier calcul : $E(Y)=\sum_{i=1}^{n-1}i(n-i)2^{i-n-1}=\frac{n}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i2^i-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i^22^i=\frac{n}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2)-\frac{1}{2^{n+1}}((n^2-2n+3)2^{n+1}-6)=n(n-1)+\frac{n}{2^n}-(n^2-2n+3)+\frac{3}{2^n}=n-3+\frac{n+3}{2^n}$, en exploitant les résultats des premières questions.

Exercice 12 (***)

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN \dots NB$, avec $k - 1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2} = \frac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
   $= \frac{1}{2^n} \left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.

2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \frac{1}{2}$.

3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \frac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2}$. On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 =$

$1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{1}{2}$. De même, $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. On a $Z_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$; $P(Z_2 = 2) = \frac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1; 2; \dots ; p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; ... ; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) \times P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) = \frac{c}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} kP(Z_p = k) + \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) = \frac{cE(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : P(X_1 = 1) = P(X_2 = 2) = \cdots = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p) = E(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2} = \frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 13 (**)

1. On reconnait ici un exemple classique de loi uniforme, plus précisément $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 2n\})$. Le cours nous affirme alors que $E(X) = \frac{2n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{4n^2-1}{12}$.
2. (a) On a manifestement $P(U \leqslant i) = \frac{i}{2n}$ (il y a i jetons possibles qui ont un numéro inférieur ou égal à i parmi les $2n$ que contient l'urne) et de même $P(D \leqslant i) = \frac{i}{2n}$. Les deux événements étant indépendants (puisque les deux tirages le sont), on a donc $P(Y \leqslant i) = P((D \leqslant i) \cap (U \leqslant i)) = \frac{i^2}{4n^2}$.

   (b) L'événement $Y = i$ est réalisé exactement lorsque $Y \leqslant i$ est réalisé mais pas $Y \leqslant i-1$. Or, $(Y \leqslant i-1) \subset (Y \leqslant i)$, donc $P(Y = i) = P(Y \leqslant i) - P(Y \leqslant i-1) = \frac{i^2-(i-1)^2}{4n^2} = \frac{2i-1}{4n^2}$.

(c) Calculons donc à l'aide de nos connaissances sur les sommes classiques $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} i \times P(Y = i) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^{2n} 2i^2 - i = \frac{1}{4n^2} \left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(2n+1)}{2} \right)$
$= \frac{n(2n+1)}{2n^2} \left(\frac{4n+1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(2n+1)(8n+2-3)}{12n} = \frac{(2n+1)(8n-1)}{12n} = \frac{16n^2+6n-1}{12n}$.

3. (a) Pour avoir $Z = i$, il faut nécessairement tirer un numéro inférieur ou égal à n (n'importe lequel) au premier tirage (histoire d'effectuer un deuxième tirage), ce qui se produit avec une probabilité $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Au deuxième tirage, il faut ensuite tirer le numéro i spécifiquement, ce qui se produit évidemment avec une probabilité $\frac{1}{2n}$. On a donc $P(Z = i) = \frac{1}{4n}$.

(b) Il y a maintenant deux possibilités d'obtenir le numéro i : soit on le tire au premier tirage, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{2n}$ (dans ce cas, il n'y aura pas de second tirage), soit on l'obtient au deuxième tirage, et la probabilité est alors la même qu'à la question précédente. Au total, on a donc $P(Z = i) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{3}{4n}$.

(c) Vérifions : $\sum_{i=1}^{2n} P(Z = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3}{4n} = \frac{n}{4n} + \frac{3n}{4n} = 1$.

(d) Calculons déjà $E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3i}{4n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{3i}{4n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n} = \frac{3n(2n+1)}{4n} - \frac{n+1}{4} = \frac{5n+2}{4}$. Pour comparer cette espérance à celle de Y, on calcule tout bêtement $E(Y) - E(Z) = \frac{16n^2+6n-1}{12n} - \frac{5n+2}{4} = \frac{16n^2+6n-1-15n^2-6n}{12n} = \frac{n^2-1}{12n}$. Cette valeur étant positive, on aura $E(Y) \geqslant E(Z)$, ce qui est intuitivement logique (dans un cas on garde systématiquement le meilleur des deux tirages mais dans l'autre non). De même, calculons $E(Z) - E(X) = \frac{5n+2}{4} - \frac{2n+1}{2} = \frac{n}{4}$. Là encore une valeur positive logique (on gagne quand même en tentant deux essais plutôt qu'un seul tirage complètement aléatoire).

Exercice 14 (***)

1. Si $b = 1$, on note simplement le numéro du tirage où on a tiré l'unique boule blanche de l'urne, qui suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
2. Il y a cette fois-ci quatre boules dans l'urne, deux blanches et deux noires. La dernière boule blanche ne peut pas être tirée avant le deuxième tirage, donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$. On aura $X = 2$ si on tire les deux boules blanches lors des deux premiers tirages, ce qui se produit avec une probabilité $P(X = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. On aura par ailleurs $X = 4$ si on tire une boule blanche lors du dernier tirage, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2}$ puisqu'il y a autant de boules noires et de boules blanches dans l'urne au départ (le fait que ce soit le dernier tirage ne change rien, renverser le temps ne modifierait pas les probabilités à chaque tirage). On a donc $P(X = 4) = \frac{1}{2}$ et on en déduit que $P(X = 3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ (valeur qu'on peut bien sûr obtenir par un calcul direct). On calcule ensuite $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$, puis $E(X^2) = 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{3}$ et enfin, en appliquant le théorème de König-Huygens,

$V(X) = \dfrac{35}{3} - \dfrac{100}{9} = \dfrac{5}{9}$.

3. (a) Il faut au moins b tirages pour tirer toutes les boules blanches, donc $X(\Omega) = \{b, \dots, N\}$.

 (b) Il faut bien sûr que $k \geqslant b$ pour que l'énoncé ait un sens. Dans ce cas, tirer $b-1$ boules blanches lors des $k-1$ premiers tirages a une probabilité $\dfrac{\dbinom{b}{b-1} \times \dbinom{N-b}{k-b}}{\dbinom{N}{k-1}}$ (l'ordre de ces $k-1$ tirages n'a aucune importance pour ce qu'on calcule ici). Pour que l'événement $X = k$ soit réalisé, il faut en plus qu'on tire lors du tirage k la dernière boule blanche, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{N-k+1}$ (puisqu'il reste à ce moment $N-k+1$ boules dans l'urne, dont une seule boule blanche). Conclusion : $P(X = k) = \dfrac{b \times \dbinom{N-b}{k-b}}{(N-k+1)\dbinom{N}{k-1}} = \dfrac{b(N-b)!(k-1)!(N+1-k)!}{(N-k+1)(k-b)!(N-k)!N!} = \dfrac{n(N-b)!(k-1)!}{(k-b)!N!}$. Or, on peut calculer $\dfrac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{N}{b}} = \dfrac{(k-1)!b!(N-b)!}{(b-1)!(k-b)!N!} = \dfrac{n(N-b)!(k-1)!}{(k-b)!N!} = P(X = k)$.

 (c) On calcule bêtement $E(X) = \displaystyle\sum_{k=b}^{k=N} k \times \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{N}{b}} = \frac{b}{\binom{N}{b}} \sum_{k=b}^{N} \binom{k}{b}$. On ne dispose pas a priori d'une formule permettant de calculer cette dernière somme mais on peut ruser. On sait en effet que la somme des probabilités des événements $X = k$ doit être égale à 1, ce qui revient à dire que $\displaystyle\sum_{k=b}^{N} \binom{k-1}{b-1} = \binom{N}{b}$. En modifiant la valeur de b pour la rendre égale à $b+1$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=b+1}^{N} \binom{k-1}{b} = \binom{N}{b+1}$, ou si préfère (en décalant les indices) $\displaystyle\sum_{k=b}^{N-1} \binom{k}{b} = \binom{N}{b+1}$. Il manque un seul terme pour retrouver la somme apparaissant dans notre calcul d'espérance : $\displaystyle\sum_{k=b}^{N} \binom{k}{b} = \binom{N}{b+1} + \binom{N}{b} = \binom{N+1}{b+1}$ en appliquant la relation de Pascal. Finalement, $E(X) = \dfrac{b}{\dbinom{N}{b}} \times \dfrac{N+1}{b+1} = \dfrac{b(N+1)}{b+1}$ après simplification des factorielles.