Feuille d'exercices n°20 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 mai 2020

Vrai-Faux

1. Est-il vraiment nécessaire de rappeler encore une fois que c'est complètement faux ? Deux siècles de confinement supplémentaire pour ceux qui auraient osé se tromper.
2. Non, cette égalité ne peut avoir de sens que si $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, ce qui n'est pas automatique avec l'hypothèse faite ici.
3. Vrai, c'est le principe des séries télescopiques.
4. Vrai, c'est le critère de Riemann (exprimé sous une forme très légèrement différente dans le cours).
5. Vrai, il s'agit d'une série géométrique dérivée, le fait de commencer la série à $k = 0$ au lieu de $k = 1$ ne change rien puisque le terme initial est de toute façon nul.

Exercice 1 (* à ***)

Ligne par ligne :

- En écrivant $\dfrac{n-1}{3^n} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n}{3^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n}$, on reconnait une somme de deux séries géométriques (dont une dérivée) convergentes, et on calcule facilement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$ (il est normal que le résultat soit négatif, le premier terme de la somme est égal à -1 et les autres sont trop petits pour le compenser).
- On peut écrire, à partir de $n = 2$ (les deux premiers termes de la série sont de toute façon nuls), $\dfrac{n(n-1)}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, ce qui permet de reconnaitre une série exponentielle convergente et de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2 e^x$.
- Inutile de beaucoup se fatiguer ici, $\dfrac{2n^2}{n^3-1} \sim \dfrac{2}{n}$, terme général d'une série divergente, donc notre série diverge (elle est à termes positifs à partir du rang 2).
- On peut écrire $\dfrac{1}{2^{2n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4^n}$ pour reconnaitre une série géométrique convergente, de somme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$.
- Rien à faire ici, c'est un exemple direct de série exponentielle, de somme $4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.
- La série est à termes positifs et son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$, donc elle converge (comparaison avec une série de Riemann). Pour calculer sa somme, il faut faire un télescopage, en commençant par écrire $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$. En multipliant l'égalité

par n et en évaluant pour $n = 0$, on trouve $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $n+1$ et en prenant $n = -1$ on a $b = -1$. On trouve de même $c = \frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$. Pour effectuer le télescopage, on travaille avec les sommes partielles : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{p+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{p+2}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)}$. Il y a bien convergence, vers la somme suivante : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

- Encore des géométriques à faire apparaitre : $\frac{3+n2^n}{4^{n+2}} = \frac{3}{16} \times \frac{1}{4^n} + \frac{1}{32} \times \frac{n}{2^{n-1}}$, tout converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3+n2^n}{4^{n+2}} = \frac{3}{16} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{32} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
- Il y a un télescopage tout simple, mais il est n'est même pas utile de s'en rendre compter : $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge (elle est à termes positifs).
- Le terme général de cette série (positive à partir de $n = 1$) étant équivalent à $\frac{1}{4n^2}$, elle converge. De plus, $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n-1}$, avec $a(2n-1) + b(2n+1) = 1$ (pour changer, on met tout au même dénominateur et on identifie), soit $a + b = 0$ et $b - a = 1$, donc $b = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{2}$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$. La série converge donc vers $-\frac{1}{2}$.
- Il suffit de se souvenir que $\text{ch}(n) = \frac{e^n + e^n}{2}$ pour écrire notre série comme somme de deux séries géométriques convergentes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3e)^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{e}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3e}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-e} + \frac{3e}{3e-1}\right)$ (inutile de tenter de simplifier plus).
- Le terme général de cette série à termes positifs est équivalent à $\frac{5}{4n^2}$, elle converge donc. On effectue une décomposition en éléments simples : $\frac{5}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3} = \frac{a(2n+3)+b(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$. Par identification, on obtient $2a + 2b = 0$, soit $b = -a$, et $3a + b = 5$, dont on déduit $a = \frac{5}{2}$ et $b = -\frac{5}{2}$. Autrement dit, $\sum_{n=0}^{p} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+1} - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+3} = \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2n+1} - \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{p+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2p+3)}$. Il y a bien convergence de la série, vers $\frac{5}{2}$.
- Si on tient vraiment à prouver la convergence avant d'essayer de calculer la somme, on peut trouver un équivalent du terme général à coup de développements limités. On peut aussi

anticiper le télescopage et calculer directement la somme partielle : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, qui converge vers la somme $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- On constate ici que $e^{-nx} = (e^{-x})^n$. On est donc en présence d'une simple série géométrique de raison e^{-x}. Cette série convergera donc si et seulement si $x > 0$ (condition pour que $e^{-x} \in]-1, 1[$), vers $\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$.
- Rien d'évident ici, mais on sait que la suite (F_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 5$, et pour racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Si on part de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on aura donc $F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, avec $F_0 = \alpha + \beta = 0$, et $F_1 = \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{\beta}{2}(1-\sqrt{5}) = 1$, soit $2\alpha\sqrt{5} = 1$, et $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, puis $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$. Comme $x_1 > 1$, et $|x_2| < 1$, on obtient $F_n \sim \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (le second terme tendant vers 0), puis $\frac{1}{F_n} \sim 2\sqrt{5} \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que notre série converge (elle est à termes positifs), mais il n'existe en fait aucun moyen d'en calculer aisément la somme !

Exercice 2 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n} u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une certaine limite l. On en déduit que $e^{-u_n} u_n$ tend vers le^{-l}, mais aussi vers l puisque cette expression est égale à u_{n+1}. On en déduit que $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n} u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite (v_n) diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 3 (*)

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on sait que son reste converge vers 0. On va tout de même commencer par travailler avec des sommes partielles (ou plutôt des restes partiels). Sur l'intervalle $[k, k+1]$, on a l'encadrement $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$ par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. En intégrant cet encadrement, on obtient $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\, dx \leqslant \frac{1}{k^2}$, soit $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$ (encadrement qui est en l'occurrence facile à obtenir sans calculer d'intégrale). Si on somme l'inégalité de droite pour k variant entre n (qu'on fixera désormais) et p (qui va ensuite tendre vers $+\infty$), on trouve alors $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \geqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{p+1}$ (télescopage dans la somme de droite). De même, en sommant les inégalités de gauche pour k variant entre $n-1$ et $p-1$ (pour avoir des $\frac{1}{(k+1)^2}$ variant entre $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{p^2}$), on obtient l'autre inégalité $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n-1}^{p-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}$. Autrement dit, on a prouvé que $\frac{1}{n} - \frac{1}{p-1} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}$. En multipliant tout par n, on a donc $1 - \frac{n}{p-1} \leqslant n \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n}{n-1} - \frac{n}{p}$. Lorsqu'on faire tendre p vers $+\infty$ à n fixé, les deux membres extrêmes convergent (mais pas vers 1, attention à la rigueur !), et on en déduit que $1 \leqslant \lim_{p \to +\infty} n \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n}{n-1}$, soit $1 \leqslant nR_n \leqslant \frac{n}{n-1}$. On peut maintenant faire tendre n vers $+\infty$ pour trouver, par application du théorème des gendarmes cette fois-ci, $\lim_{n \to +\infty} nR_n = 1$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

La généralisation se fait exactement de la même façon : sur $[k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$, ce qui donne par intégration $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)(k+1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\alpha)k^{1-\alpha}} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$. Une somme télescopique plus tard, on trouve $\frac{1}{(1-\alpha)(p+1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)p^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\alpha)(n-1)^{1-\alpha}}$. Comme précédemment, un premier passage à la limite sur p permet d'obtenir l'encadrement $1 \leqslant (1-\alpha)n^{1-\alpha}R_n \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-\alpha}$, puis le théorème des gendarmes donne l'équivalent $R_n \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}}$.

Exercice 4 (***)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorer, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a alors également $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$. Or, $u_n(1-u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.
   La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on en déduit en prenant la limite de chaque côté que $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

2. En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0.

3. La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n), on a $\lim_{n \to +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérée diverge.

4. En reprenant la relation de récurrence définissant la suite, on constate que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \sim -u_n$ puisque u_n est une suite qui converge vers 0. La série $\sum -u_n$ (qui est à termes négatifs) diverge donc, et $\sum u_n$ également.

Exercice 5 (* à **)

Toujours ligne par ligne :

- La série est à termes positifs, de terme général équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série de Riemann convergente), donc converge.
- La série est à termes positifs, et $\dfrac{1}{e^n + e^{-n}} \sim \dfrac{1}{e^n}$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série converge.
- Même si on se trompe dans l'équivalent, on tombera sur une série convergente. En l'occurrence, $\dfrac{1}{n^3 + 2^n} \sim \dfrac{1}{2^n}$, et la série converge.
- Le terme général ne tend même pas vers 0, puisque $\dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}$ a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc la série diverge grossièrement.
- Ici, la positivité est évidente, et $\sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 4n + 1}} \sim \sqrt{\dfrac{1}{n^2}} \sim \dfrac{1}{n}$, donc la série diverge.
- La série est à termes positifs, et $\dfrac{\ln(n)}{3^n} \leqslant \dfrac{2^n}{3^n}$ (au moins à partir d'un certain rang), ce qui suffit à assurer la convergence.
- Encore une série qui diverge grossièrement, le terme général tendant vers 1 (en factorisant, on constate que le dénominateur est équivalent à $\ln(3n)$, donc à $\ln(n)$, puisque $\ln(3n) = \ln(n) + \ln(3)$.
- On peut par exemple écrire que $\dfrac{n^2}{n!} \sim \dfrac{n(n-1)}{n!} \sim \dfrac{1}{(n-2)!}$, ce qui assure la convergence de la série. Notons qu'on peut très bien calculer sa somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e$.
- Un peu plus pénible que celui de la ligne du dessus, mais on peut certainement écrire qu'à partir d'un certain rang, $\ln(n) \leqslant n^{\frac{1}{4}}$ (puisque le ln est négligeable par rapport à toute puissance strictement positive), donc $\dfrac{ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \dfrac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Ceci assure la convergence de notre série.
- On constate par exemple que $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n} = \dfrac{1}{2n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ (quantité conjuguée), qui tend certainement vers 0, et assure la divergence grossière de la série proposée.
- C'est beaucoup plus intéressant : $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$, avec $n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ $= -n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = -n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -n + \dfrac{1}{2} + o(1)$. On en déduit que $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{-n} \times e^{-\frac{1}{2}} \times e^{o(1)} \sim \dfrac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$, terme général d'une série géométrique convergente. Notre série est donc convergente.
- Ici, le plus simple est de faire une comparaison série-intégrale. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$ pour $\alpha > 0$ (si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge de toute façon

car son terme général est supérieur à celui de la série harmonique). Mieux, on sait calculer $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}\,dx = \int_2^x \frac{1}{x}(\ln(x))^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}[\ln(x)^{1-\alpha}]_2^n = \frac{\ln(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + K$. Cette valeur a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $1-\alpha < 0$, soit $\alpha > 1$. On trouve donc exactement le même critère que pour les séries de Riemann.

Exercice 6 (*)

La série de terme général $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge car son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{4k^2}$. De même pour la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+2)^2}$. On peut donc écrire que la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+2)^2} + \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Or, la somme de gauche n'est autre que la somme des inverses des carrés de tous les entiers (on a juste séparé entiers pairs et impairs) qui vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Quant à la deuxième somme à droite, elle vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 7 (**)

1. On sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (par exemple en utilisant le début du développement limité d'arctangente), donc le terme général de notre série est équivalent à $\dfrac{1}{n^2+n+1}$, puis à $\dfrac{1}{n^2}$, ce qui assure la convergence de notre série (qui est à termes positifs).
2. Calculons la tangente de chacun de ces deux nombres : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)\right) = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. D'un autre côté, via la formule d'addition des tangentes, $\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \dfrac{\tan(\arctan(n+1)) - \tan(\arctan(n))}{1 + \tan(\arctan(n+1))\tan(\arctan(n))} = \dfrac{1}{1+n^2+n}$. Nos deux nombre ont donc la même tangente, et appartiennent tous les deux à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (pas croissance de l'arctangente, $\arctan(n+1) - \arctan(n) \geqslant 0$, et cette même valeur est majorée par $\arctan(n+1) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$), donc elles sont égales.
3. Notre série est donc tout simplement télescopique : $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(p+1) - \arctan(0) = \arctan(p+1)$, qui converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 8 (***)

1. Effectuons un développement asymptotique de notre expression : $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(a\sqrt{1-\dfrac{1}{n}} + b + c\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right) = \sqrt{a - \dfrac{a}{2n} - \dfrac{a}{8n^2}} - \dfrac{a}{16n^3} + b + c + \dfrac{c}{2n} - \dfrac{c}{8n^2} + \dfrac{c}{16n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = (a+b+c)\sqrt{n} + \dfrac{c-a}{2\sqrt{n}} - \dfrac{a+c}{8n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Une première condition nécessaire évidente est $a+b+c=0$, sinon la série diverge grossièrement. Si cette condition est vérifiée,

et si $a \neq c$, notre terme général est équivalent à $\dfrac{c-a}{2\sqrt{n}}$, terme général d'une série de Riemann divergente, donc la série diverge. On doit donc imposer $c = a$ (et donc $b = -a - c = -2a$), on obtient alors un terme général équivalent à $\dfrac{-a}{4n^{\frac{3}{2}}}$, ce qui suffit cette fois-ci à prouver la convergence de la série, puisqu'on est en présence d'une série de Riemann convergente. Les conditions $c = a$ et $b = -2a$ sont donc nécessaires et suffisantes.

2. On va évidemment faire pareil : $\sqrt{n^2+4n+1} = n\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$
$= n\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$= n\left(1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{4}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n - 2 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Pour annuler tous les termes divergents de ce développement asymptotique, il faut donc choisir $a = 1$, $b = -2$ et $c = -\dfrac{5}{2}$. On aura alors une équivalence du terme général avec $\dfrac{3}{n^2}$ qui assure la convergence de la série.

3. Allons-y pour un dernier développement asymptotique : $\sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$
$= n\left(\left(1+\dfrac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}\right) = n\left(1 + \dfrac{a}{3n^2} - \dfrac{a}{9n^4} - 1 - \dfrac{3}{2n^2} + \dfrac{3}{8n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = \dfrac{2a-9}{6n} + \dfrac{27-8a}{72n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Il faut et il suffit donc que a soit égal à $\dfrac{9}{2}$ pour que la série converge.

Problème 1 (***)

1. (a) Je noterai u_n le terme général de la série (S_n) pour toutes les premières questions de ce corrigé. Dans ce premier cas particulier, on a $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$, ce qui correspond au terme général d'une série géométrique convergente. Plus précisément, la somme de (S_n) vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

   (b) Si la suite est constante égale à p, on a de même $u_n = \dfrac{1}{p^{n+1}}$, avec $\dfrac{1}{p} < 1$ puisque p est un entier naturel non nul. On est toujours en présence d'une série géométrique, de somme $\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{p-1}$.

   (c) Dans ce cas, on aura $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} p_k = \prod_{k=0}^{n} k+2 = (n+2)!$, donc $u_n = \dfrac{1}{(n+2)!}$. On reconnait le terme général d'une série exponentielle (à un décalage près), convergeant vers $e-2$ (il manque les deux premiers termes par rapport à la série exponentielle usuelle). On sait bien que $2 < e < 3$, donc $e - 2 \in]0,1[$.

   (d) Constatons simplement que $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+2) = \prod_{k=0}^{n} 2(k+1) = 2^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(k+1) = 2^{n+1}(n+1)!$, ce qui correspond à la valeur donnée pour l'inverse dans l'énoncé. On reconnait à nouveau pour (S_n) une série exponentielle, mais avec cette fois-ci une valeur de x égale à $\dfrac{1}{2}$, et un seul terme manquant par rapport à la série complète. On en déduit que la série a pour somme $e^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{e} - 1$. Comme $\sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3}$, la valeur obtenue est bien dans l'intervalle $]0,1[$.

2. Dans tous les cas, la suite (p_n) étant croissante, on aura toujours $2 \leqslant p_n$, donc $u_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. On en déduit que la série (S_n) est toujours à termes positifs et majorée par la série étudiée dans notre premier exemple, qui converge vers 1. Elle converge donc vers une somme positive (strictement car le premier terme de la série est strictement positif) et inférieure ou égale à 1.
3. Une fois fixée la valeur de p_0, la croissance de la suite (p_n) assure que $p_0 \leqslant p_n$ pour tout entier n, donc $u_n \leqslant \frac{1}{p_0^{n+1}}$. On reproduit en fait le même raisonnement que ci-dessus pour constater que, dans ce cas, $\frac{1}{p_0} < S(p) \leqslant \frac{1}{p_0 - 1}$ (la valeur maximale est obtenue quand la suite est constante égale à p_0, cas particulier étudié ci-dessus). En particulier, si une deuxième suite (q_n) vérifie $q_0 < p_0$, on aura nécessairement $S(p) < S(q)$ puisque $\frac{1}{p_0 - 1} \leqslant \frac{1}{q_0}$ (les nombres p_0 et q_0 étant entiers, on a nécessairement $q_0 \leqslant p_0 - 1$). Deux suites n'ayant pas le même premier terme ne peuvent donc pas avoir la même image par S. Il faudrait généraliser ce résultat au cas où ce n'est pas le premier terme qui est différent, mais le n-ème, pour une valeur quelconque de n. C'est en fait le même principe : soient deux suites (p_n) et (q_n) distinctes, il existe donc (au moins) une valeur de n pour laquelle $p_n \neq q_n$. Notons n_0 cette valeur, et supposons par exemple $p_{n_0} > q_{n_0}$. La suite (p_n) étant croissante, $p_n \geqslant p_{n_0}$ pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0. On en déduit (pour les mêmes valeurs de n) que $u_n \leqslant \frac{u_{n_0-1}}{p_{n_0}^{n-n_0+1}}$, puis que $S_n(p) < S_{n_0-1} + \frac{u_{n_0-1}}{p_{n_0} - 1}$ (on a isolé les n_0 premiers termes de la somme pour lesquels la majoration précédente n'est pas valable). Or, les premiers termes de la somme associée à (q_n) sont les mêmes que ceux associés à (p_n) et par hypothèse $\frac{1}{p_{n_0-1}} \leqslant \frac{1}{q_{n_0}}$. On en déduit que $S_n(p) \leqslant S_{n_0-1}(q) + \frac{u_{n_0-1}}{q_{n_0}} = S_{n_0}(q)$. En passant à la limite, $S(p) \leqslant S_{n_0}(q) < S(q)$, ce qui achève de prouver l'injectivité de l'application S.
4. (a) Calculons donc : $y_0 = \frac{3}{7}$, donc $p_0 = Ent\left(1 + \frac{7}{3}\right) = 3$. Ensuite, $y_1 = 3y_0 - 1 = \frac{2}{7}$, et $p_1 = Ent\left(1 + \frac{7}{2}\right) = 4$. On continue : $y_2 = 4y_1 - 1 = \frac{1}{7}$ et $p_2 = Ent\,(1+7) = 8$. Allez, encore un tour : $y_3 = 8y_2 - 1 = \frac{1}{7}$. Ah, pas la peine d'aller plus loin, ça va boucler, on aura toujours $y_n = \frac{1}{7}$ et $p_n = 8$ pour $n \geqslant 2$. On a donc (en reprenant toujours les mêmes notations) $u_0 = \frac{1}{3}$, $u_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ puis, $\forall k \geqslant 2$, $u_k = \frac{1}{12} \times \frac{1}{8^{k-1}}$ (en fait, cette formule est aussi valable lorsque $k = 1$). La série de terme général (u_n) converge évidemment, et $S(p) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8^{k-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{84} = \frac{28+8}{84} = \frac{3}{7}$. Incroyable, $S(p) = x$. Ca ne peut pas être un hasard !

   (b) D'après la définition de la partie entière, on a toujours $\frac{1}{y_n} < p_n \leqslant 1 + \frac{1}{y_n}$, donc $1 < p_n y_n \leqslant y_n + 1$ et $0 < y_{n+1} \leqslant 1$. En fait, pour être tout à fait rigoureux, il faut faire une récurrence puisqu'on a besoin d'avoir $y_n \geqslant 0$ pour que les inégalités ne changent pas de sens.

   (c) La suite (p_n) est évidemment une suite d'entiers naturels puisqu'elle est définie comme partie entière d'un nombre positif. Comme (y_n) est décroissante, $\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)$ est croissante, et (p_n) également (la partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$). Enfin, $1 + \frac{1}{y_0} \geqslant 2$ puisque $y_0 \leqslant 1$, donc $p_0 \geqslant 2$.

   (d) Il suffit de retourner la relation donnant y_{n+1} en fonction de y_n pour trouver $y_n =$

$\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{y_{n+1}}{p_n}$. On peut alors obtenir successivement différentes expressions de x : $x = y_0$ (par définition) puis $x = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{y_1}{p_0}$, puis $x = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0p_1} + \dfrac{y_2}{p_0p_1}$. On conjecture que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p_0 \dots p_k} + \frac{y_n}{p_0 \dots p_{n-1}}$. Reste à le prouver facilement par récurrence : l'initialisation est vraie, et on passe du rang n au rang $n+1$ en remplaçant $\dfrac{y_n}{p_0 \dots p_{n-1}}$ par $\dfrac{1}{p_0 \dots p_{n-1}} \times \left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{y_{n+1}}{p_n}\right)$. Autrement dit, $x = S_{n-1}(p) + \dfrac{y_n}{p_0 \dots p_n}$. Si on fait tendre n vers $+\infty$, le membre de droite converge vers $S(p)$ (le terme supplémentaire est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{p_0 \dots p_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, qui tend vers 0). On vient de créer, pour tout nombre $x \in]0,1]$ une suite (p_n) telle que $S(p) = x$, ce qui prouve la surjectivité de l'application S. Puisqu'on a déjà prouvé qu'elle était injective, S est donc bijective.

Problème 2 (***)

1. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$. Le signe de cette expression n'est malheureusement pas vraiment évident. Pour le déterminer, on va carrément poser $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$, fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, dérivable et de dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x - x(x+1) + (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$. Cette dérivée étant manifestement positive, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Or, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On en déduit la négativité de f sur tout son intervalle de définition, et en particulier que $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante (on a par exemple $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{3}{2} - \ln(2) \simeq 0,81$ et $u_3 = \dfrac{11}{6} - \ln(3) \simeq 0,7$, ça a l'air cohérent).
2. Il est en effet presque facile en utilisant des intégrales de minorer u_n. Rappelons le principe : la fonction inverse étant décroissante sur tout intervalle de la forme $[k, k+1]$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire sur cet intervalle l'encadrement $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$, puis intégrer cet encadrement entre k et $k+1$ pour obtenir $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$. En additionnant de tels encadrement pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et $n-1$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, soit (en décalant les indices dans la somme de gauche) $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_{n-1}$. En particulier, on a donc $H_{n-1} - \ln(n) \geqslant 0$, donc $H_n - \ln(n) > 0$ (puisque, bien entendu, $H_n > H_{n-1}$). Autrement dit, $u_n > 0$, donc notre suite est décroissante et minorée, et converge nécessairement. Sa limite γ est nécessairement positive au vu de la minoration obtenue, et inférieure à 1 puisque $u_1 = 1$.
3. (a) Cette formule ressemble étrangement à des histoires de formules de Taylor avec reste intégral. On va donc la démontrer exactement de la même manière, en faisant des IPP (deux en l'occurrence). Commençons par poser $u(t) = \dfrac{1}{2}\left(t - k - \dfrac{1}{2}\right)^2$, donc $u'(t) = t - k - \dfrac{1}{2}$, et $v'(t) = f''(t)$ qu'on va bien sûr intégrer en $v(t) = f'(t)$ (toutes nos fonc-

tions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$, et ce sera encore le cas pour la deuxième IPP). On trouve $I_k = \left[\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\ dt = \frac{f'(k+1)}{8} - \frac{f'(k)}{8} - \int_k^{k+1} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\ dt$. On effectue donc une deuxième IPP en posant cette fois $u(t) = t-k-\frac{1}{2}$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = f'(t)$, donc $v(t) = f(t)$, pour obtenir $I_k = \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t)\ dt = \frac{f'(k+1)-f(k)}{8} - \frac{f(k+1)}{2} - \frac{f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\ dt$.

(b) On additionne l'égalité obtenue à la question précédente pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et $n-1$, ce qui donne $\sum_{k=1}^{n-1} I_k = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}(f'(k+1)-f'(k)) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(f(k+1)+f(k)) + \int_1^n f(t)\ dt$. La première somme du membre de droite est télescopique et simplement égale à $\frac{f'(n)-f'(1)}{8}$. La deuxième vaut (en séparant en deux puis en décalant les indices dans la première des deux sommes) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \frac{f(n)+f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)+f(1)}{2}$. En passant certains termes à gauche et d'autres à droite, on obtient exactement l'égalité demandée dans l'énoncé.

(c) Si $f(x) = \frac{1}{x}$, on a donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. De plus, lorsque $t \in [k, k+1]$, $0 \leqslant t-k \leqslant 1$, donc $-\frac{1}{2} \leqslant t-k-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant \left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ (cet encadrement est d'ailleurs vrai quelle que soit la fonction f). On en déduit que, sur $[k, k+1]$, $\frac{1}{2}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t) \leqslant \frac{1}{4t^3}$, dont l'inégalité demandée découle par intégration.

(d) On sait bien sûr calculer $\int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\ dt = \left[-\frac{1}{8t^2}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$. La somme partielle $\sum_{k=1}^{n} I_k$ est donc majorée par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8(n+1)^2}$ (il s'agit d'une somme télescopique). Ce majorant converge manifestement vers $\frac{1}{8}$, ce qui assure que la série $\sum I_k$, qui est une série à termes positifs, est majorée et donc convergente. Pour majorer le reste, on utilise exactement la même technique (on peut travailler directement avec des sommes infinies puisque tout converge) : $\sum_{k=n}^{+\infty} I_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{8n^2}$. En particulier ce reste est certainement négligeable par rapport à $\frac{1}{n}$.

(e) Appliquons la formule démontrée en question b à notre fonction inverse : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8} + \int_1^n \frac{1}{x}\ dx - \left(l - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. On a remplacé le dernier terme $\sum_{k=1}^{n} I_k$ par

$l + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puisqu'on a vu dans les deux questions précédentes que la série convergeait (on note l sa somme) et que le reste (donc l'écart entre la somme partielle et la somme l) était négligeable par rapport à $\dfrac{1}{n}$. On a donc $H_n = \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + \ln(n) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, où on a posé $\gamma = \dfrac{5}{8} - l$ (cette constante est nécessairement égale à γ puisqu'on sait déjà que $H_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$, et que les termes restants tendent tous vers 0). On peut faire passer le terme $-\dfrac{1}{8n^2}$ dans le o pour trouver exactement ce qui était demandé dans l'énoncé).

4. (a) C'est exactement le même encadrement que celui utilisé en début d'exercice pour la fonction inverse : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$, sur lequel l'encadrement $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$ est donc valable. On l'intègre pour trouver $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{t^\alpha}\, dt \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$. L'inégalité de droite de cet encadrement constitue celle de gauche de celui demandé. Quitte à remplacer les k par des $k-1$ dans celle de gauche (ce qui suppose $k \geqslant 2$), on obtient celle de droite.

   (b) On additionne tous les encadrements précédents en faisant varier k entre une valeur fixée $n+1$ et un entier variable $p > n$. Cela donne (on utilise bien sûr la relation de Chasles pour regrouper les intégrales) $\displaystyle\int_{n+1}^{p+1} \dfrac{1}{t^\alpha}\, dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^p \dfrac{1}{t^\alpha}\, dt$. On sait bien sûr calculer les intégrales de cet encadrement : celle de droite est égale à $\left[-\dfrac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_n^p = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$, qui converge quand p tend vers $+\infty$ vers $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. De même, l'intégrale de gauche converge vers $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$. Quitte à tout multiplier par $(\alpha-1)n^{\alpha-1}$, on en déduit l'encadrement suivant (on sait que la série au centre de l'encadrement converge d'après le critère de Riemann) : $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant (\alpha-1)n^{\alpha-1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant 1$. Le minorant de cet encadrement a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ (la puissance $\alpha - 1$ étant fixe, même pas besoin de passer sous forme exponentielle, c'est immédiat), le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} = 1$, ce qui revient exactement à l'équivalent demandé par l'énoncé.

5. C'est pénible à prouver rigoureusement, car on est obligés de revenir à la définition de la limite avec des ε. Supposons donc $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \sim b_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, et il existe donc un entier n_0 à partir duquel $1 - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_k}{b_k} \leqslant 1 + \varepsilon$, autrement dit $(1-\varepsilon)b_k \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)b_k$. On additionne ces encadrement pour toutes les valeurs de k à partir d'un certain entier $n+1$ (supérieur à n_0, bien entendu) pour obtenir $(1-\varepsilon) \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. Autrement dit, quel que soit le réel positif ε, il existe un rang à partir duquel $1 - \varepsilon \leqslant \dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k} \leqslant 1 + \varepsilon$. C'est exactement la définition d'une limite égale à 1, ce qui prouve l'équivalent demandé.

6. (a) On sait déjà que $\gamma = \lim u_n$, et donc également $\gamma = \lim x_n$ (ce n'est pas le $\dfrac{1}{2n}$ qu'on a soustrait qui va modifier la limite). Il faut alors penser à construire une série télescopique ayant

la même nature que (x_n) : on sait que $\sum_{k=n}^{+\infty} x_{k+1} - x_k = \gamma - x_n$ (par télescpage donc). Il ne reste alors plus qu'à calculer cette série : $\sum_{k=n}^{+\infty} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} - \frac{1}{2(k+1)} - u_k + \frac{1}{2k} = \sum_{k=n}^{+\infty} H_{k+1} - H_k - \ln(k+1) + \ln(k) + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k-1)} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ quitte à décaler les indices. C'est bien la formule souhaitée. Attention à ne surtout pas séparer les sommes infinies qu'on manipule depuis tout à l'heure en plusieurs sommes distinctes, car ces dernières seraient très certainement divergentes.

(b) Il s'agit d'obtenir un équivalent de la série trouvée à la question précédente pour pouvoir appliquer le résultat de la question 5. Pour cela, on a déjà besoin d'un équivalent de ce qui est dans la somme, qu'on va obtenir à l'aide d'un développement limité (pas trop le choix ici) : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. La variable $\frac{1}{n}$ tend sans problème vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut écrire les premiers termes de nos développements limités (il faut deux ou trois termes selon les cas pour que tout ne s'annule pas) pour obtenir $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Avec le facteur $\frac{1}{2}$ qu'on avait laissé de côté pour le calcul, on a donc un terme général équivalent à $\frac{1}{6n^3}$. L'application de la question 5 et de la question 4.b permet alors d'affirmer que $\gamma - x_n \sim \frac{1}{12n^2}$. Autrement dit, $x_n = \gamma - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.