Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2019

Exercice 1 (*)

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Pour que la matrice AB soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de B doivent être nulles, et la troisième est quelconque.

2. D'après la question précédente, C doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit CA pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g - h = 3h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$, le réel h étant quelconque.

Exercice 2 (* à **)

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array}\right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \dfrac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x + z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{x, y, \dfrac{3}{2}y, x + \dfrac{3}{2}y\right\}$, où x et y sont deux réels quelconques. Autrement, la matrice M est de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$.

- Posons donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On calcule $MB = \begin{pmatrix} a+3b-2c & -b+c & a+2b-c \\ d+3e-2f & -e+f & d+2e-f \\ g+3h-2i & -h+i & g+2h-i \end{pmatrix}$

et $BM = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 3a-d+2g & 3b-e+2g & 3c-f+2i \\ -2a+d-g & -2b+e-h & -2c+f-i \end{pmatrix}$, ce qui donne le sublimissime système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & - & 2c & = & a & & & + & g \\ & - & b & + & c & = & b & & & + & h \\ a & + & 2b & - & c & = & c & & & + & i \\ d & + & 3e & - & 2f & = & 3a & - & d & + & 2g \\ & - & e & + & f & = & 3b & - & e & + & 2h \\ d & + & 2e & - & f & = & 3c & - & f & + & 2i \\ g & + & 3h & - & 2i & = & -2a & + & d & - & g \\ & - & h & + & i & = & -2b & + & e & - & h \\ g & + & 2h & - & i & = & -2c & + & f & - & i \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce genre de système a priori immonde, il vaut mieux commencer par tout exprimer en fonction des coefficients de la première ligne a, b et c. Les trois premières équations donnent ainsi $g = 3b - 2c$; $h = c - 2b$ et $i = a + 2b - 2c$. Ensuite, la huitième équation donne $e = 2b + i = a + 4b - 2c$, la dernière équation donne $f = g + 2h + 2c = -b + 2c$; et la sixième $d = 2a + 2g + 3h - 2i = -4b + 3c$. Il reste trois équations à traiter, en remplaçant chaque variable par l'expression obtenue : la quatrième devient $-4b+3c+3a+12b-6c+2b-4c = 3a+4b-3c+6b-4c$, soit $3a+10b-7c = 3a+10b-7c$, qui est toujours vérifiée ; la cinquième donne $-a-4b+2c-b+2c = 3b-a-4b+2c+2c-4b$, soit $-a-5b+4c = -a-5b+4c$ qui est également toujours vrai ; et enfin la septième donne $3b-2c+3c-6b-2a-4b+4c = -2a-4b+3c-3b+2c$, soit $-2a-7b+5c = -2a-7b+5c$, qui est encore une fois toujours vraie. Les réels a, b et c peuvent donc être choisis quelconques, et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -4b+3c & a+4b-2c & -b+2c \\ 3b-2c & c-2b & a+2b-2c \end{pmatrix}$.

- C'est évidemment le gag de la liste : toutes les matrices (carrées d'ordre n) commutent avec I_n.
- En notant M une matrice carrée quelconque d'ordre 3 (mêmes notations que pour la matrice B), on trouve $MC = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$ et $CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obeitnt donc les conditions $b = h = d = f = 0$, soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$.

Si une matrice M commute avec toutes les matrices diagonales, elle commute en particulier avec la matrice ayant un unique coefficient non nul $a_{ii} = 1$. Or, la multiplication à gauche par cette matrice ne conserve que la colonne numéro i de la matrice M, et la multiplication ne conserve que la ligne numéro i. Si on veut que les deux soient égales, tous les coefficients de la ligne et de colonne numéro i doivent être nuls, à l'exception du coefficient diagonal m_{ii} qui est commun aux deux matrices. En faisant ce calcul avec toutes les valeurs possibles de i, on se rend donc compte que la matrice M est nécessairement diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale commute avec toutes les autres matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le cas des matrices symétriques, ce n'est en fait pas vraiment plus dur. Toutes les matrices diagonales étant symétriques, la matrice M doit d'après ce qui précède être diagonale. Mais cette fois-ci, ça ne suffit pas. Prenons donc comme matrice diagonale particulière la matrice vérifiant $a_{ij} = a_{ji} = 1$ (pour des valeurs distinctes de i et de j), et ayant tous ses autres coefficients nuls. Quand on multiplie cette matrice à gauche par une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux λ_1, …, λ_n, il ne reste comme coefficients non nuls que λ_i en position (i,j) et λ_j en position (j,i). Au contraire, quand on fait le produit à droite, λ_i se trouve en position (j,i) et λ_j en position (i,j). Si on veut que les deux matrices soient égales, on doit avoir $\lambda_i = \lambda_j$. Comme cela doit être vraipour toutes les valeurs de i et de j, tous les coefficients diagonaux de M sont en fait égaux, ce qui signifie qu'il existe un réel λ tel que $M = \lambda I$. Réciproquement, une telle matrice commute certainement avec toutes les matrices symétriques puisqu'elle commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

C'est en fait très simple, le produit est symétrique si $AB =^t (AB)$, soit $AB =^t B^t A$. Comme les deux matrices sont supposées symétriques, cela revient à dire que $AB = BA$, autrement dit que les matrices commutent.

Exercice 4 (**)

Prouvons la formule donnée par récurrence : pour $k = 0$, c'est évident : $AI - IA = 0$. Supposons-là vérifiée au rang k, alors $AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^kB - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^kAB - B^kBA = kB^kB + B^k(AB - BA) = kB^{k+1} + b^kB = (k+1)B^{k+1}$, ce qui prouve la formule au rang $k+1$. Par principe de récurrence, la formule est donc vrai pour tout entier k. Par linéarité de la trace, on a alors $\mathrm{Tr}(kB^k) = \mathrm{Tr}(AB^k) - \mathrm{Tr}(B^kA) = 0$ puisque le calcul de la trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue ce produit. On en déduit que $\mathrm{Tr}(B^k) = 0$.

Exercice 5 (**)

Commençons par prendre la trace des deux côtés de l'équation : $\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, une condition nécessaire est donc $\mathrm{Tr}(X)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B)$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, on en déduit que $\mathrm{Tr}(X) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$. Par ailleurs, on doit avoir $X = B - \lambda A$, avec en l'occurence $\lambda = \mathrm{Tr}(X)$. Considérons donc une matrice de la forme $X = B - \lambda A$, elle vérifie $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$. On doit donc avoir, pour qu'une telle matrice soit solution, $\mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, soit $\lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)\left(1 - \dfrac{1}{1 + \mathrm{Tr}(A)}\right) = \mathrm{Tr}(B) \times \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, donc $\lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$ (sauf si $\mathrm{Tr}(A) = 0$). La seule solution possible est donc $X = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$. On vérifie sans problème qu'une telle matrice est effectivement solution (unique, donc) du problème. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on doit simplement avoir $\mathrm{Tr}(X) = 0$, ce qui sera toujours le cas lorsque $X = B - \lambda A$. L'équation de départ s'écrit alors $B - \lambda A = B$, donc on doit tout de même avoir $\lambda = 0$ et la solution unique est $X = B$. Enfin, si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, la condition donnée initialement ne peut être vérifiée que si $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Dans le cas contraire, il ne peut pas y avoir de solution à l'équation. Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) = 0$, en posant $X = B - \lambda A$, on aura $\mathrm{Tr}(X) = \lambda$, donc l'équation s'écrit $B - \lambda A + \lambda A = B$. Cette condition est manifestement vérifiée quelle que soit la valeur de λ, c'est donc le seul cas où on a une infinité de solutions, en l'occurence toutes les matrices de la forme $B - \lambda A$, pour λ parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (***)

1. On calcule facilement $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$. Rappelons la méthode la plus simple pour trouver ensuite le polynôme annulateur. On peut toujours le prendre unitaire et chercher deux constantes telles que $A^2 = \alpha A + \beta I$. Le coefficient β est simplement le coefficient de proportionnalité entre les coefficients non diagonaux de A et de A^2, ici 5. Il ne reste alors plus qu'à constater que $A^2 - 5A = -4I$, soit $A^2 - 5A + 4I = 0$. Le polynôme recherché est donc $P = X^2 - 5X + 4$.

2. En reprenant l'égalité obtenue à la question précédente, $A(A-5I) = -4I$ ou encore $A\left(-\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I\right) = I$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{5}{4}I - \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
3. Le polynôme se factorise immédiatement sous la forme $(X-1)(X-4)$ puisque 1 est racine évidente (mais si vous préférez perdre votre temps à calculer un discriminant, naturellement, personne ne vous en empêchera). La division euclidienne sera de la forme $X^n = PQ + R$, où $d°(R) < 2$, soit $R = a_nX + b_n$. Évaluons cette égalité pour les racines du polynôme, qui ont l'avantage de vérifier $P(x) = 0$ et donc d'annuler le terme en PQ : $1 = R(1) = a_n + b_n$; et $4^n = 4a_n + b_n$. La différence des deux équations donne $3a_n = 4^n - 1$, soit $a_n = \frac{4^n-1}{3}$, dont on déduit que $b_n = 1 - a_n = \frac{4-4^n}{3}$.
4. D'après la question précédent, $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$. Comme $P(A) = 0$, il ne reste que $A^n = a_nA + b_nI = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I$ (on vérifie aisément que la formule donne une valeur correcte de A^2, inutile de préciser les coefficients de A^n, ça n'a pas grand intérêt).

Exercice 7 (**)

On calcule aisément $J^2 = nJ$ (la matrice ne contient que des n), puis $J^3 = n^2J$, et on conjecture que $J^k = n^{k-1}J$, ce qui se prouve sans problème par récurrence : c'est vrai au rang 1, et si on le suppose vrai au rang k, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times n^{k-1}J = n^{k-1}J^2 = n^kJ$. On constate que la matrice A dont on cherche les puissances peut s'écrire sous la forme $A = 2I - J$ (où J désigne évidemment ici une matrice carrée d'ordre 3, on aura donc $J^k = 3^{k-1}J$). Les matrices I et J commutant certainement, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = (2I-J)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k I^k (-J)^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^k 3^{n-k-1}\right) J + 2^nI$ (on est obligés d'isoler le terme numéro n de la somme car la formule pour les puissances de J ne fonctionne pas pour J^0). Dans la parenthèse, on reconnait presque une formule du binôme (sur les réels cette fois-ci) à deux détails près : il faudrait sortir un facteur $\frac{1}{3}$ pour avoir un $(-2)^k3^{n-k}$, et surtout il manque le fameux terme numéro n, qui serait ici égal à $(-2)^n$. On peut donc écrire $A^n = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k(-3)^{n-k} - (-2)^n\right) J + 2^nI = 2^nI + \frac{(-1)^n - (-2)^n}{3}J$. On vérifie que, pour $n = 1$, on retrouve $A = 2I - J$; pour $n = 2$, on devrait avoir $A^2 = 4I - J$, ce qui est effectivement le cas.

Exercice 8 (**)

Première méthode, qui fonctionnera toujours pour une matrice d'ordre 2 : chercher un polynôme annulateur de degré 2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = 2A - I$. La matrice est donc annulée par le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, cherchons à écrire la division euclidienne de X^n par P, on sait qu'elle sera de la forme $X^n = PQ + a_nX + b_n$. On ne dispose ici que d'une seule racine, qui nous donne la condition $1 = a_n + b_n$. pour en obtenir une deuxième, il faut penser à dériver : $nX^{n-1} = P'Q + PQ' + a_n$, avec $P(1) = P'(1) = 0$, donc $n = a_n$. On trouve donc $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$, soit $A^n = nA + (1-n)I$.

Autre possibilité : écrire $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. On constate que $B^2 = 0$ (quelle chance !), les matrices I et B commutent évidemment donc, par la formule du binôme de Newton,

$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = I + nB$ (tous les termes suivants sont nuls). Comme $B = A - I$, on retrouver $A^n = I + n(A-I) = nA + (1-n)I$.

Allez, une troisième méthode pour la route, on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$ et on conjecture pour A^n une matrice de la forme $A^n = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix}$. Prouvons cette formule par récurrence : c'est vrai au rang 1 en posant $a_1 = 4$, et en le supposant vérifié au rang n, alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n+5 & -a_n-4 \\ a_n+4 & -a_n+3 \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $a_{n+1} = a_n + 4$. La suite (a_n) est par ailleurs arithmétique de raison 4, donc $a_n = a_1 + 4(n-1) = 4n$. On en déduit directement que $A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}$ (on peut aussi directement conjecturer la forme exacte de la matrice A^n à patrtir de ses premières puissances).

Exercice 9 (***)

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix}$. Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.
2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété « Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k = 2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$). Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A \times (a_k A^2 + b_k A) = a_k A^3 + b_k A^2 = a_k(6A - A^2) + b_k A^2 = (b_k - a_k)A^2 + 6a_k A$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.
3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines $r = \frac{-1+5}{2} = 2$ et $s = \frac{-1-5}{2} = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. En multipliant la première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient $45\beta = 3$, soit $\beta = \frac{1}{15}$, puis $\alpha = \frac{1-9\beta}{4} = \frac{1-\frac{3}{5}}{4} = \frac{1}{10}$. On a donc $a_k = \frac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6 \times \frac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$.
4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient $a_0 = \frac{1}{6}$ et $b_0 = \frac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 10 (*)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\dfrac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière formule laisse supposer qu'on a peut-être pas utilisé la meilleure méthode pour inverser B, je vous laisse chercher d'autres façons d'y parvenir plus rapidement si vous le souhaitez.

Exercice 13 (**)

Ce n'est en fait pas vraiment plus compliqué que pour une matrice d'ordre 3 ou 4, on applique les différentes étapes du pivot mais on peut difficilement les écrire explicitement. En l'occurence, on va faire successivement les opérations élémentaires $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$; $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-1}$; $L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - L_{n-2}$; $\dots$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient ainsi la matrice identité. Quand on effectue les mêmes opérations en parallèle à partir de la matrice I_n, on transforme successivement les lignes de la matrice : L_{n-1} devient $0 \dots 1 \ \ -1$; L_{n-2} devient $0 \dots 1 \ \ -1 \ 1$; etc jusqu'à L_1 qui devient $1 \ -1 \ 1 \ -1 \dots (-1)^{n-1}$. Finalement, la matrice est inversible (ce n'est pas une surprise puisqu'elle est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale), d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \cdots & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & & \cdots & & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (**)

Soyons fous et faisons le calcul avec le pivot !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_2 - 6L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & 24 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 24 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & -5 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 6L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 10L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_5 \leftarrow 21L_5 - L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow 21L_4 + L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 21L_3 + L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3 \\ \\ L_6 \leftarrow -L_6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3$$

Pour la dernière opération, on va faire $L_1 \leftarrow -126L_1 - 2L_2 - 3L_3 - 4L_4 - 5L_5 - 6L_6$:

$$\begin{pmatrix} -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 20 & -22 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ -22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à tout diviser par -126 pour obtenir le passionnant résultat :

$$A^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} -20 & 22 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -20 & 22 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -20 & 22 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -20 & 22 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -20 & 22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (**)

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & & & 10z & = & 5 \end{array}\right.$

Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $z = \dfrac{1}{2}$; puis $y = 8z - 3 = 1$ et enfin $x = 1 - 2y - 3z = -\dfrac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{5}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & 3y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 8z & = & -8 \end{array}\right.$

On remonte : $z = -1$ puis $y = -3 - z = -2$ et enfin $x = \dfrac{1 + y - 3z}{2} = 1$, donc $\mathcal{S}\{(1; -2; -1)\}$

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right.$

On remonte : $z = 2$ puis $y = \dfrac{5-2}{3} = 1$ et $x = 2 - 2y - z = -2$, soit $\mathcal{S} = \{(-2; 1; 2)\}$.

- Il vaut mieux ici commencer par permuter les lignes pour ne pas avoir de pivot dépendant de m (ce qui empêche de faire des opérations sur les lignes en les multipliant par des coefficients susceptibles d'être nuls).

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \qquad L_2 \leftarrow mL_1 - L_2 \\ x & + & my & + & z & = & m \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3 - 1 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & m^2 - m \qquad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3 - 1 \\ & & & & (m^2+m-2)z & = & m^3 + m^2 - m - 1 \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer si $m \neq 1$ (à cause du coefficient devant y), et si $m^2 + m - 2 \neq 0$. Comme $m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$ (il y a une racine évidente), les seules valeurs problématiques sont 1 et -2. Si $m \notin \{-2; 1\}$, on remonte le système pour trouver $z = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + m - 2} = \dfrac{(m+1)(m^2-1)}{(m-1)(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$; puis $y = \dfrac{m^3 - 1 - (m^2-1)z}{m-1} = m^2 + m + 1 - (m+1)z = m^2 + m + 1 - \dfrac{(m+1)^3}{m+2}$; et enfin $x = m^2 - mz - y = -m - 1 - \dfrac{m(m+1)^3}{m+2}$ (valeurs sans aucun intérêt, d'ailleurs).

Regardons plutôt ce qui se passe dans les cas particuliers. D'abord si $m = 1$, le système triangulaire se réduit à l'unique équation $x + y + z = 1$ (effectivement, dans le système initial, les trois équations sont alors identiques), donc $\mathcal{S} = \{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans le cas où $m = -2$, la dernière équation devient $0 = -3$, le système n'a alors pas de solution.

- Là encore, on va se débrouiller pour utiliser des pivots constants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ x & + & aby & + & z & = & b \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1 - a \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b - 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & (2-a-a^2)z & = & b - a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b - 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

On va avoir un système qui n'est pas un système de Cramer si $b = 0$, $a = 1$ ou $a = -2$ (cf le système précédent pour ces valeurs, le coefficient devant z est le même). Dans tous les autres cas, on a une solution unique dont l'expression ne présente aucun intérêt : $z = \dfrac{b-a}{2-a-a^2}$; $y = \dfrac{b-1}{b(a-1)} + \dfrac{b-a}{b(2-a-a^2)}$; et $x = 1 - \dfrac{b-1}{a-1} + \dfrac{b-a}{2+a}$.

Regardons les cas particuliers : si $b = 0$, l'inconnue y disparait tout simplement du système, et la deuxième équation donne $x + z = 0$. Or, en additionnant les deux équation extrêmes, on trouve $(a+1)(x+z) = 2$, ce qui est impossible si $x + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Si $a = 1$, les membres de gauche des trois équations sont identiques égaux à $x + by + z$, mais celui de droite vaut b dans la deuxième équation et 1 dans les deux autres. Si $b \neq 1$, il n'y a donc pas de solution, et si $b = 1$, les solutions sont de la forme $(x, y, 1 - x - y)$.

Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = b + 2$, il faut donc avoir $b = -2$ également.

On doit alors résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$

La différence des deux premières équations donne alors $-3x - 6y = 3$, soit $x = -1 - 2y$; la différence des deux dernières donne $-6y-3z=3$, soit $z=x=-1-2y$. On ne peut pas faire mieux, donc $\mathcal{S}=\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5 \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right.$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w=6-y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y+10(6-y)=60$, soit $4y=0$. On a donc $y=0$, puis $3w=6$ donc $w=2$; $21t=69-3\times 2-7\times 0=63$ donc $t=3$; $z=2\times 0+5\times 3+2\times 2-18=1$ et enfin $x=3+0-2\times 1-3\times 3-2=-10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S}=\{(-10;0;1;3;2)\}$.

Problème

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculons donc $A^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{3} & \frac{2}{9}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$. En étudiant attentivement les coefficients non diagonaux, on se convainc que $a=\dfrac{5}{6}$ (mais oui, $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{9}$). Ensuite, $A^2-\dfrac{5}{6}A=\dfrac{1}{6}I$. On trouve donc $A^2=\dfrac{5}{6}A+\dfrac{1}{6}I$.
2. C'est évidemment une récurrence classique : c'est vrai au rang 2 d'après la question précédente mais aussi au rang 1 en posant $a_1=1$ et $b_1=0$; et même au rang 0 puisque $A^0=I=0\times A+1\times I$. Supposons donc $A^n=a_nA+b_nI$, alors $A^{n+1}=A^n\times A=(a_nA+b_nI)\times A=a_nA^2+b_nA=a_n\left(\dfrac{5}{6}A+\dfrac{1}{6}I\right)+b_nA=\left(\dfrac{5}{6}a_n+b_n\right)A+\dfrac{1}{6}a_nI$. La relation est vérifiée au rang $n+1$, elle est donc vrai pour tout entier n.
3. Les relations de récurrence découlent de la question précédente : $a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n+b_n$, et $b_{n+1}=\dfrac{1}{6}a_n$. On en déduit que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\dfrac{5}{6}a_{n+1}+b_n=\dfrac{5}{6}a_{n+1}+\dfrac{1}{6}a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2-\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{6}$ a pour racine évidente 1, et pour deuxième racine $-\dfrac{1}{6}$ puisque le produit des racines vaut $-\dfrac{1}{6}$. On en déduit que a_n peut se mettre sous la forme $a_n=\alpha+\beta\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. À l'aide des valeurs initiales, on va déterminer α et

β : pour $n = 0$, $a_0 = \alpha + \beta = 0$; et $a_1 = \alpha - \dfrac{\beta}{6} = 1$. Autrement dit $\alpha + \dfrac{\alpha}{6} = 1$, donc $\alpha = \dfrac{6}{7}$, puis $\beta = -\dfrac{6}{7}$. On obtient donc $a_n = \dfrac{6}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right)$, puis $b_n = \dfrac{1}{6}a_{n-1} = \dfrac{1}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right)$ (la formule fonctionne également quand $n = 0$ puisqu'elle donne bien $b_0 = 1$).

4. On sait que $A^n = a_nA + b_nI$, ce qui permet d'écrire, si on y tient vraiment, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$.
5. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$, tous les coefficients de la matrice précédente ont une limite finie, la suite de matrices (A^n) converge donc vers $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, qui est bien une matrice stochastique puisque $\dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7} = 1$.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On calcule bêtement $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $J^3 = J^2$, et on en déduit que, $\forall n \geqslant 2$, $J^n = J^2$.
2. On remarque aisément que $B = \dfrac{1}{2}(I + J)$. Les matrices I et J commutant bien entendu, on peut écrire, lorsque $n \geqslant 2$, que $B^n = \dfrac{1}{2^n}(J + I)^n = \dfrac{1}{2}^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k}$. Il faut isoler les termes correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ pour pouvoir écrire $J^k = J^2$ dans tout le reste de la somme, on trouve alors $B^n = \dfrac{1}{2}^n \left(I + nJ + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} J^2\right)$. Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, on peut simplifier : $B^n = \dfrac{1}{2^n}(I + nJ + (2^n - n - 1)J^2) = \dfrac{1}{2}^n I + \dfrac{n}{2^n}J + \left(1 - \dfrac{n+1}{2^n}\right)J^2$. Si on tient à écrire la matrice explicitement, $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Là encore, aucune difficulté pour trouver la limite de chacun des coefficients, on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} B^n = J^2$, qui est bien une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Si $a = b = 1$, la matrice A n'est autre que l'identité, toutes ses puissances sont donc égales à I. Si $a = b = 0$, par contre, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $A^2 = I$, puis $A^3 = A$, et la suite des puissances de A est 2-périodique : si n est pair, $A^n = I$, si n est impair, $A^n = A$. C'est le seul cas où la suite ne converge pas.
2. Calculons donc : $A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$, et $A - (a + b - 1)I = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$. Le produit de ces deux matrices donne $P(A) = 0$ (on a pour chaque coefficient une somme de deux termes opposés).
3. La polynôme P étant de degré 2, on peut écrire la division sous la forme $X^n = PQ + a_nX + b_n$. On regarde ce que donne cette égalité pour les deux racines du polynôme P, à savoir 1 et $a + b - 1$: $1 = a_n + b_n$ et $(a + b - 1)^n = a_n(a + b - 1) + b_n$. En soustrayant les deux équations, on trouve $a_n(a + b - 2) = (a + b - 1)^n - 1$, soit $a_n = \dfrac{(a + b - 1)^n - 1}{a + b - 2}$. On

en déduit $b_n = 1 - a_n = \dfrac{a+b-1-(a+b-1)^n}{a+b-2}$. En conclusion, le reste recherché vaut $\dfrac{(a+b-1)^n-1}{a+b-2}X + \dfrac{a+b-1+(a+b-1)^n}{a+b-2}$.

4. Puisque $P(A) = 0$, on peut déduire des calculs précédents que $A^n = \dfrac{(a+b-1)^n-1}{a+b-2}A + \dfrac{a+b-1+(a+b-1)^n}{a+b-2}I$

5. On peut écrire les quatre coefficients de la matrice A^n, ou plus simplement passer directement à la limite dans l'égalité précédente. Puisque $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$, et qu'on a éliminé le cas $a = b = 1$, on aura toujours $a+b-1 < 1$ (et $a+b-1 > -1$ puisque les deux nombres sont positifs et ne sont pas tous les deux nuls), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^n$. La suite (A^n) a donc pour limite $\dfrac{a+b-1}{a+b-2}I - \dfrac{1}{a+b-2}A$, ou encore $\dfrac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien stochastique puisque la somme des coefficients de chaque ligne vaut $\dfrac{a+b-2}{a+b-2} = 1$ (et que tous les coefficients de la matrice sont bien positifs, le coefficient $\dfrac{1}{a+b-2}$ étant négatif.

IV. Une étude plus générale.

1. Il suffit de constater que si la matrice A est stochastique, toutes ses puissances seront stochastiques. En effet, le produit de deux matrices stochastiques est stochastique : $\sum_{j=1}^{n}(AB)_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj}\right)$. Par hypothèse, si B est stochastique, quelle que soit la valeur de k, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$, donc il ne reste que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ puisque A est stochastique. Le fait que A^n est toujours stochastique est alors une récurrence immédiate : c'est vrai pour A par hypothèse, et si c'est pour A^n, le produit $A^n \times A$ est un produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Autrement dit, la somme des coeffients de la ligne numéro i sur A^n est toujours égale à 1. Si on suppose que chacun de ces coefficients a une limite finie b_{ij} lorsque n tend vers $+\infty$, par somme de limite, on aura certainement $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, et la matrice B sera donc stochastique.

   Pour prouver que $B^2 = B$, on peut constater la chose suivante : si (A^n) a pour limite B, alors $(A^{2n}) = ((A^n)^2)$ aura pour limite B^2. C'est une simple conséquence du fait que les coefficients du carré d'une matrice sont obtenus à partir de ceux de la matrice à l'aide de sommes et de produits et que ces opérations sont conservées par passage à la limite (faites une démonstration formelle si vous le souhaitez). Or, la suite (A^{2n}) est une sous-suite de la suite (A^n) qui converge vers B, donc elle converge aussi vers B (si vous n'êtes pas convaincu par le fait qu'on puisse affirmer celà sur une suite de matrices, songez qu'on est simplement en train de faire cette affirmation sur chacune des n^2 suites de réels constitués de chacun des coefficients de la matrice A^n). Conclusion $B^2 = B$ puisque les deux matrices sont limites d'une même suite.

   Pour montrer que $AB = BA$, plein de possiblités, une notamment utilise le même genre d'astuce que pour $B^2 = B$. La sous-suite (A^{n+1}) converge certainement vers B. Or, $A^{n+1} = A \times A^n$ converge aussi vers AB, donc $B = AB$. De même, $A^{n+1} = A^n \times A$, donc $BA = AB = B$ (c'est même plus fort que ce qui était demandé).

2. Ce n'est pas si compliqué que ça en a l'air. Quand on effectue le produit $A \times A^p$, $(A^{p+1})_{ij} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik}(A^p)_{kj} \geqslant \sum_{k=1}^n a_{ik}\alpha_j^{(p)}$ puisque tous les coefficients $(A^p)_{kj}$ sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$ par définition de $\alpha_j^{(p)}$. Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$ puisque la matrice A est stochastique, donc $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \alpha_j^{(p)}$. Autrement dit, tous les coefficients de la colle j dans A^{p+1} sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$. A fortiori le plus petit d'entre eux, d'où $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)}$. On démontre de la même façon que $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$ en majorant cette fois-ci tous les coefficients de la colonne par $\beta_j^{(p)}$.
La dernière inégalité demande un peu plus de soin : en reprenant la calcul précédent, on peut isoler dans la somme le terme correspondant à $\beta_j^{(p)}$, notons son indice de ligne l, pour écrire $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \displaystyle\sum_{k\neq l} a_{ik}\alpha_j^{(p)} + a_{il}\beta_j^{(p)} \geqslant (1-a_{il})\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)}$ (puisque m est le plus petit de tous les éléments de la matrice A. Tout cela est supérieur à $\alpha_j^{(p)} - m\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)} = \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$, donc $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$. Un calcul exactement symétrique donne $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)} - m\delta_j^{(p)}$. Il ne reste plus qu'à soustraire les deux inégalités pour obtenir celle demandée.

3. Par une récurrence immédiate, on aura alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_j^{(n)} \leqslant (1-2m)^n\delta_j^{(0)} = (1-2m)^n$ (dans la matrice identité, la différence entre le plus grand et le plus petit coefficient d'une colonne vaut toujours 1. Comme $m > 0$ (la matrice ne contient que des termes strictement positifs par hypothèse), et comme $\delta_j^{(n)}$ est toujours positif par définition, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \delta_j^{(n)} = 0$. On en déduit aisément que les suites $(\alpha_j^{(n)}$ et $\beta_j^{(n)}$ sont adjacentes : en effet, on a prouvé plus haut que l'une était croissante et l'autre décroissante, et on vient d'expliquer que leur limite tendait vers 0. Les deux suites sont donc convergentes vers une même limite l_j (qui dépend quand même de j). Mais si le plus grand et le plus petit coefficient de la colonne convergent vers une même limite, par théorème des gendarmes, tous les termes de la colonne, qui sont compris entre les deux, convergent également vers l_j. Ainsi, tous les coefficients de la suite de matrices (A^n) ont une limite, et la suite converge. Par ailleurs, on a prouvé que les limites étaient identiques pour tous les coefficients d'une même colonne, donc toutes les lignes de la matrice B sont identiques.

4. On sait que la suite (A^n) converge vers une matrice B dont toutes les lignes sont identiques. Mais il est évident dans ce cas que la suite $({}^tA^n)$ converge vers ${}^tB$ (on se contente de mettre les coefficients à un endroit différent dans la matrice, ça ne va sûrement pas changer les limites !). Comme les deux suites sont en fait identiques puisque $A =^t A$, on en déduit que $B =^t B$. La matrice B est donc une matrice symétrique dont toutes les lignes sont identiques, tous ses coefficients sont nécessairement égaux (puisque ses colonnes sont alors elles aussi identiques). Comme la somme des coefficients sur une lignes doit donner 1, chaque coefficient doit donc être égal à $\dfrac{1}{3}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.