Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 20 : Matrices et algèbre linéaire

PTSI B Lycée Eiffel

18 mai 2020

Vrai-Faux

1. On peut associer à une application linéaire une unique matrice représentative.
2. Si X et X' représentent les coordonnées d'un même vecteur dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $X' = PX$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Une matrice de passage est toujours inversible.
4. Si $\det(u, v, w) = 0$ (où u, v et w sont trois vecteurs de l'espace) alors il y a au moins deux vecteurs sur les trois qui sont colinéaires.
5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et A est une matrice carrée, alors $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

Exercice 1 (*)

Déterminer la matrice dans la base canonique de l'espace vectoriel E des applications linéaires suivantes (on ne vérifiera pas la linéarité) :

1. $f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - z, -x - 3y + 2z)$; $E = \mathbb{R}^3$
2. $f(P) = (2X + 1)P - X^2P'$; $E = \mathbb{R}_2[X]$
3. $f(P) = \displaystyle\int_X^{X+2} P(t)\ dt$; $E = \mathbb{R}_2[X]$
4. $f(M) = AM + MB$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (*)

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Prouver que s est une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 3 (**)

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'application f qui, à un polynôme P, associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$. Vérifier à l'aide de cette matrice que f est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 4 (**)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. L'application φ est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par φ de $X^2 - 1$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 5 (***)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ un morphisme vérifiant $u^2 + u + id = 0$.

1. Montrer que u est bijectif, et déterminer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que, pour tout vecteur non nul x, $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est de dimension 2.
3. Prouver l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f devient $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de la matrice B, puis celles de A.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(M - I)(M + 3I) = 0$.
2. En déduire que $\ker(f - id) \oplus \ker(f + 3\,id) = \mathbb{R}^3$.
3. Donner la dimension et une base de chacun des deux noyaux de la question précédente.
4. Sans faire de calculs, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale (et donner cette matrice).

Exercice 8 (***)

On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n)$; $y_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n)$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n)$.

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et X_n, X_{n+1} sont des matrices colonnes.
2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
3. Montrer que S_1 et S_{-2} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en donner des bases.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice A^n et en déduire X^n en fonction de X_0.

Exercice 9 (*)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2+1; X+1; 2X^2-X)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 10 (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11 (* à **)

Calculer les déterminants suivants (en essayant d'utiliser des développements suivant les lignes ou les colonnes ou des combinaisons pour faire apparaitre des 0 ; vous pouvez toujours vérifier vos résultats ensuite avec Sarrus) :

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$

Exercice 12 (***)

Calculer le déterminant de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{i,i} = 0$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, et $m_{i,j} = 1$ si $j \neq i$ (on pourra chercher une relation de récurrence entre ces différents déterminants).

Exercice 13 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Pour un réel λ quelconque, calculer $\det(A - \lambda I)$.

2. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles ce déterminant est nul.
3. Donner une base de $\ker(f - \lambda\, id)$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente. Pourquoi était-il déjà certain qu'aucun de ces noyaux ne serait réduit au vecteur nul ?
4. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 14 (**)

On note dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de E.
2. Calculer le déterminant de la matrice A. Que peut-on en déduire concernant f ?
3. Calculer A^2, puis déterminer une relation entre A^2, A et la matrice identité I. En déduire une expression de la réciproque f^{-1} de f en fonction de f et de id.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda I)$, et en déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda\, id$ n'est pas un automorphisme.
5. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels $\ker(f - id)$ et $\ker(f - 2\, id)$.
6. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans E.
7. (a) Déterminer deux applications linéaires p et q telles que $p + q = id$ et $2p + q = f$ (on les exprimera en fonction de f et de id, pas besoin de donner une expression explicite).
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
8. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?

Problème 1 : étude de l'activité d'un élève de PTSI. (***)

On décide d'observer l'activité d'un élève de classe préparatoire pendant une longue période, en notant toutes les heures l'activité effectuée par l'élève en question. On observe les faits suivants :

- l'élève partage son temps entre trois activités : manger, dormir, et travailler son cours de physique.
- à l'heure numérotée 0 où on démarre l'expérience, l'élève mange.
- s'il travaille à une certaine heure n, il mangera à l'heure suivante avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, et dormira avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ (mais ne travaillera donc jamais, faut pas pousser, pas deux heures de suite sur de la physique quand même).
- s'il mange à l'heure n, de même, il se mettra au boulot avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et dormira avec proba $\dfrac{1}{2}$ à l'heure $n+1$ (et ne mangera jamais, faut digérer le McDo avant d'aller se chercher un grec).
- s'il dort à l'heure n, il se mettra au travail avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, ira prendre un repas avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, et continuera sa sieste avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.

On impose les notations suivantes pour tout l'exercice : on note A_n l'événement « L'élève travaille à l'heure n » ; B_n l'événement « L'élève mange à l'heure n » et C_n l'événement « L'élève dort à l'heure n ». On notera aussi a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Calculer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{C_3}(A_2)$.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
4. Première méthode de calcul explicite : avec des suites.
   (a) On pose $u_n = a_n + b_n + c_n$ et $v_n = a_n + b_n - c_n$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont très particulières, et déterminer leur valeur.
   (b) En déduire la valeur de c_n, puis calculer a_n et b_n (on pourra exploiter des suites arithmético-géométriques).
   (c) Déterminer les limites des trois suites quand n tend vers $+\infty$, et interpréter les résultats obtenus.
5. Deuxième méthode : à l'aide de matrices.
   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Prouver rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Exprimer A^3 en fonction de A et de A^2. La matrice A est-elle inversible ?
   (d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (e) Calculer $D = P^{-1}AP$, puis en déduire A^n (il y a un peu de calcul) et retrouver les valeurs de a_n, b_n et c_n.
6. Troisième méthode : un peu d'applications linéaires.
   (a) On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x+y+z}{2}\right)$. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer son image et son noyau. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Calculer $F = \ker(f - id)$ et $G = \ker\left(f + \frac{1}{2} id\right)$.
   (c) Montrer que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G + u_H$, avec $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_H \in \ker(f)$.
   (d) On note p, q et r les trois applications $p : u \mapsto u_F$, $q : u \mapsto u_G$ et $r : u \mapsto u_H$. Montrer qu'il s'agit de trois projecteurs, et déterminer $f \circ p$, $f \circ q$ et $f \circ r$ (on doit pouvoir trouver des expressions faciles sans chercher à faire des calculs explicites).
   (e) En déduire une expression de f^n en fonction de p, q et r, et donner l'expression explicite de f^n.
   (f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?

Problème 2 (**)

On note dans tout cet exercice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera par ailleurs f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique (base qui sera notée $\mathcal{B}$ dans la suite de l'exercice).

On note enfin $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

A. Calcul matriciel.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^3 = 2A$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\ker(f - \sqrt{2}\, id)$.
3. Soient $u = (1, 0, -1)$, $v = (1, \sqrt{2}, 1)$ et $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.
4. Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On notera P cette matrice.
5. Déterminer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Écrire la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

B. Étude d'une application linéaire.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I, A, A^2) en constitue une base.
2. Montrer que, $\forall M \in F$, $AM \in F$.
3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{L}(F)$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base (I, A, A^2).
   (c) Montrer que $g \circ g \circ g = 2g$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(g^2 - 2\, id) \subset \ker(g)$.
   (e) Déterminer une base de $\ker(g)$.
   (f) Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(g))$.
   (g) Résoudre dans F l'équation $g(M) = A + A^2$.