Feuille d'exercices n° 22 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

8 juin 2020

Exercice 1 (*)

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le point $\Omega(1; -1)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 2)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(-2; 3)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient $A(5, 6)$ et $\vec{z}$ le vecteur de coordonnées $(-3; -3)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer leurs coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Déterminer une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2 (***)

Soit ABC un triangle, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, ainsi que p le demi-périmètre du triangle : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

1. Démontrer la relation d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$.
2. En déduire la valeur de $\sin(\widehat{BAC})$.
3. Prouver la relation des sinus $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$.
4. Démontrer la formule de Héron $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 (*)

Dans un parallélogramme $ABCD$, prouver la relation $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice 4 (*)

Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

Exercice 5 (***)

Soit ABC un triangle vérifiant $AB = 1$. On se place dans un repère orthonormal dont l'origine est le point A et le premier vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note (a, b) les coordonnées du point C dans ce repère.

1. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G du triangle ABC.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit O du triangle ABC.

4. Vérifier que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$.
5. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.
6. Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux du triangle appartiennent également à son cercle circonscrit.

Exercice 6 (*)

Déterminer toutes les équations possibles (cartésienne, paramétrique, normale) de chacune des droites suivantes :

- droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$.
- droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(5;10)$.
- droite orthogonale à la précédente et passant par $C(-1,3)$.
- droite passant par $D(1,1)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(1,-2)$.

Exercice 7 (**)

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a, on définit la droite D_a d'équation $(1-a^2)x+2ay+(a^2-2a-3) = 0$. Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer une équation de l'ensemble des points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

Exercice 8 (*)

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ et $C(3,-3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. En déduire la distance de A à la droite (BC).
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. En déduire la longueur de la hauteur issue de C, et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC.

Exercice 9 (***)

On considère trois points non alignés dans le plan, et une droite (d) coupant respectivant les droites (BC), (AC) et (AB) en A', B' et C'. Par le point A', on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement en D et E la parallèle à (BC) passant par A. On souhaite prouver que les droites $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles, et on se place pour cela dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des coordonnées de B' et de C' dans le repère choisi ?
3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation de (d), de (BC), puis les coordonnées des points A', D et E.
4. Conclure à l'aide d'un calcul de déterminant.

Exercice 10 (**)

Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{3}$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.

Exercice 11 (**)

Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et, pour tout réel λ, le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$. Décrire le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction du paramètre λ puis étudier l'intersection de D et de $\mathcal{C}_\lambda$.

Exercice 12 (*)

Dans un repère orthonormal, on considère pour un réel $\lambda > 0$ les deux cercles de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe (Oy) et de centre (λ, λ) tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles, et leur lieu lorsque λ décrit $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 13 (**)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4; -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$. Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathcal{C}$.

Exercice 14 (***)

On utilise dans ce problème la notation $\overline{AB}$ pour désigner la mesure algébrique du segment $[AB]$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre O et de rayon R, et M un point du plan, on appelle alors puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ le réel $p_\mathcal{C}(M) = OM^2 - R^2$.

1. Supposons que M appartienne à une droite D coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On note A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, montrer que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = p_\mathcal{C}(M)$.
2. Supposons M extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et notons S et T les points de contact de $\mathcal{C}$ avec ses tangentes issues de M. Indiquer une méthode pour construire S et T à la règle et au compas.
3. Montrer que $MT^2 = MS^2 = p_\mathcal{C}(M)$.
4. Montrer que quatre points A, B, C et D tels que (AB) et (CD) ne soient pas parallèles (elles se coupent alors en un point noté N) sont cocycliques si et seulement si $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$.
5. On considère désormais deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O' et on note Δ l'ensemble des points M vérifiant $p_\mathcal{C}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$.
   (a) Soit I le milieu de $[OO']$, montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{IM} = k$, où k est une constante à préciser.
   (b) En déduire la nature de Δ (appelée axe radical des deux cercles).
   (c) Déterminer l'axe radical de deux cercles dans le cas où ils sont sécants en deux points A et B.
   (d) Déterminer l'axe radical de deux cercles quand ils sont tangents en un point A.
   (e) Justifier que si trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ ont des leurs centres O, O' et O'' non alignés, les trois axes radicaux définis à partir de ces trois cercles sont concourants en un point R, appelé centre radical des trois cercles.
   (f) Décrire une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles disjoints, faisant intervenir un troisième cercle sécant aux deux premiers.