Feuille d'exercices n^{o} 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 septembre 2019

Vrai-Faux

1. C'est faux, au contraire, elle est inférieure quand x est négatif.
2. Faux, ça devrait être $f'(f^{-1}(x))$ au dénominateur.
3. Encore faux, si $a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante.
4. Vrai !
5. Encore vrai !

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $x + 5 > 0$, soit $x > -5$, donc $\mathcal{D}_f =]-5; +\infty[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -2 et 2. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 0] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f est paire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dfrac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \dfrac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \dfrac{1}{(2x - x^3)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (** à ***)

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
2. Cette équation du troisième degré admet -1 comme racine évidente : $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 \times (-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$; $a + b = -5$, donc $b = -6$; $b + c = 2$ donc $c = 8$, ce qui est cohérent avec la dernière condition. Notre équation est vérifiée si $x = -1$ ou $x^2 - 6x + 8 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, et de racines $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$. Conclusion : $\mathcal{S} = -1, 2, 4$.
3. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant \ln 2$, soit $\dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant 2$, donc $\dfrac{-3x+14}{2x-6} \leqslant 0$. Comme $2x - 6$ a déja été supposé positif, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right[$.
4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\dfrac{-5x-11}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$-5x-11$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-3; -\dfrac{11}{5}\right] \cup]-1; 2[$.

5. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant -2$. Lorsque $x \in [-2; 1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2 - 2x + 1 \leqslant x + 2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Le trinome est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2; \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
6. Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux *ln* de gauche pour n'avoir qu'un seul *ln* de chaque côté, ce qui donne $\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln 4$, donc $x^2 + 2x - 7 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, et admet donc deux racines $x_1 + \dfrac{-2 + 4\sqrt{2}}{2} = -1 + 2\sqrt{2}$, et $x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$. La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2} - 1\}$.

7. Tout étant positif, on peut passer au ln : $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geqslant 4\ln 2$, soit $(3x-8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}; +\infty\right[$.

8. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3>0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}; 4\right[$.

9. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}\right\}$.

10. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\dfrac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \dfrac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.

11. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0; +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.

12. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3 + 3X^2 - X - 3) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2 + 4X + 3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

13. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x\ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \dfrac{\ln 8}{3\ln 4}$. Comme $\dfrac{\ln 4}{3\ln 8} = \dfrac{2\ln 2}{9\ln 2} = \dfrac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{2}{9}\right]$.

14. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \dfrac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.

15. On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x, on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \dfrac{8+6}{14} = 1$ et $X_2 = \dfrac{8-6}{14} = \dfrac{1}{7}$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = -\ln(7)$.

16. Les valeurs $x = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$ sont interdites pour cette équation (puisqu'elles annulent ce qui se trouve à l'intérieur d'un ln). Le reste du temps, on peut écrire le membre de droite comme un ln de quotient et tout composer par l'exponentielle pour obtenir l'inéquation équivalente $\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2$. Cette inéquation est équivalente à l'encadrement $-2 \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 2$. L'inéquation de gauche de cet encadrement peut se réécrire sous la forme $\frac{5x+3}{2x+1} \geqslant 0$, elle est vérifiée sur $\left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. L'inégalité de droite peut se mettre sous la forme $\frac{3x+1}{2x+1} \geqslant 0$, elle est vérifiée sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$. Finalement, $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$, ensemble auquel il faut encore enlever la valeur 1.

17. Commençons par constater que $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Quitte à tout diviser par x^2 (de toute façon, 0 n'est pas solution de notre équation), l'équation initiale est équivalente à $x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} = 0$, soit $x^2+2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3 = 0$. On effectue notre changement de variables : $X^2+2X-3 = 0$. Cette équation a pour solution évidente $X_1 = 1$ et pour deuxième solution $X_2 = -3$ (on peut bien sûr calculer un discriminant pour les obtenir). Reste à retrouver les valeurs correspondantes de x à chaque fois : $X = 1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2-x+1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ et admet pour solutions complexes $x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. De même, $X = -3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$, admettant deux solutions réelles $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. On a bien entendu $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction $x \mapsto -2x+3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \frac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\frac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.

4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$

5. Notre dernière fonction est définie si $\frac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau

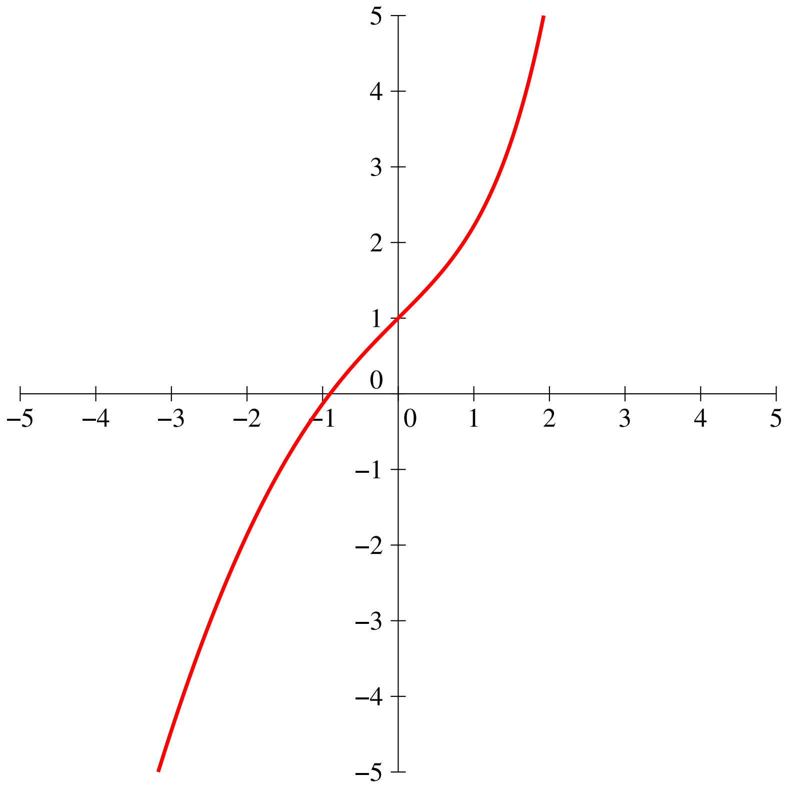
de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$, ainsi que sur $]1;+\infty[$.

Exercice 5 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

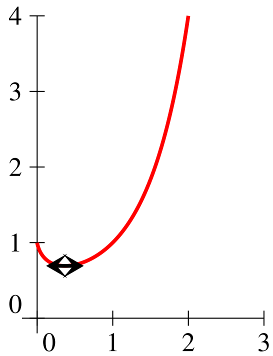
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



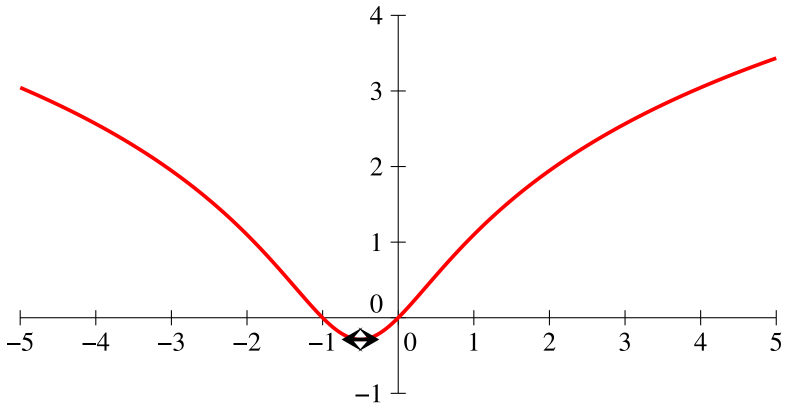
2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$



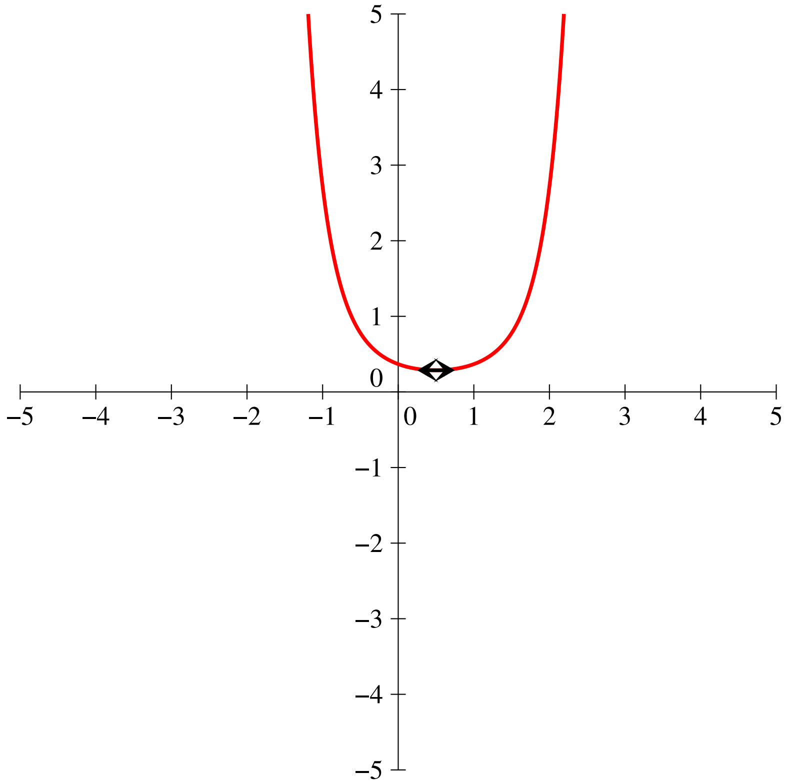
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1 + x + x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$\ln 3 - \ln 4$	↗	$+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$



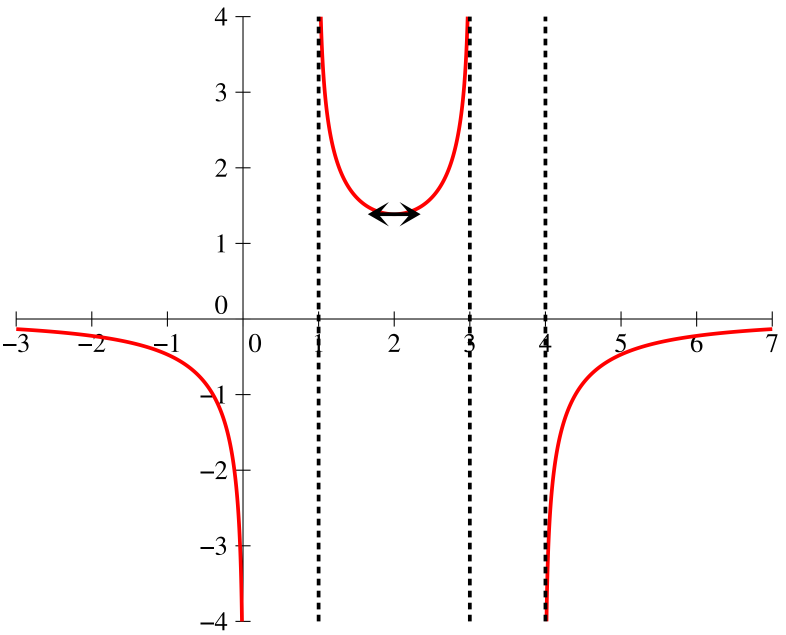
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (pour le numérateur, la factorisation par x rend les racines évidentes). D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
x^2-4x	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-4x+3	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;3[\cup]4;+\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0

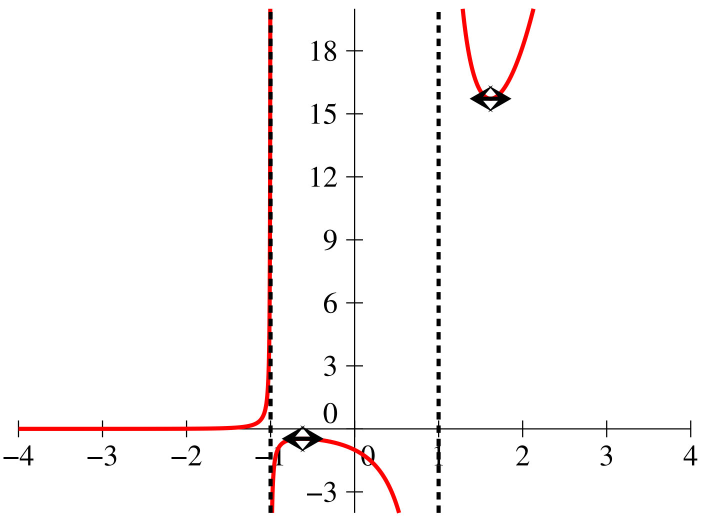


6. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1)-2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-x-1, trinome dont le discriminant vaut

$\Delta = 1 + 4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction f admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2, dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et $x^2 - 1$ est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

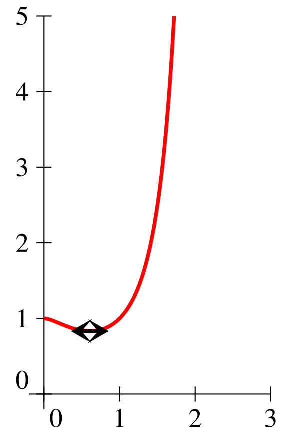
x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.

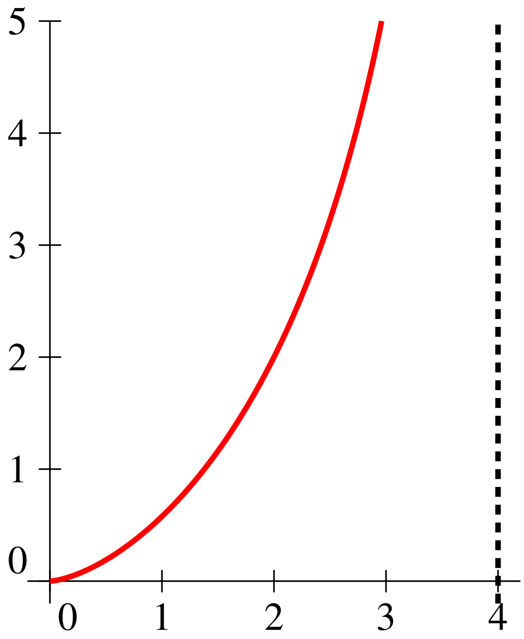


7. Cette fonction est définie sur $]0; +\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2 \ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



8. La fonction f est définie si $\dfrac{x^3}{2a-x} \geqslant 0$, soit lorsque $x \in [0; 2a[$. La fonction vérifie évidemment $f(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 2a} f(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, f a les mêmes variations que $x \mapsto \dfrac{x^3}{2a-x}$, qui a pour dérivée $\dfrac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{6ax^2-2x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, toujours positive sur $[0; 2a]$. La fonction f est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



Exercice 6 (**)

1. La fonction f est bien sûr définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. De façon évidente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Et comme $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln(x) = 0$ (croissance comparée), on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln(2)$.
2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x)+2$, la dérivée s'annule en particulier pour $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$. Après avoir calculé $f(e^{-2}) = \dfrac{1}{e} \times (-2) + \ln(2) = \ln(2) - \dfrac{2}{e}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
f	$\ln(2)$	$\searrow$	$\ln(2)-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations, f est bijective de $]0, e^{-2}]$ vers $\left[\ln(2) - \dfrac{2}{e}; \ln(2)\right[$, et elle l'est aussi de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $\left[\ln(2) - \dfrac{2}{e}, +\infty\right[$. Or, $\ln(2) - \dfrac{2}{e} \simeq -0.03 < 0$, ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur chacun des deux intervalles où f est bijective. Il y a donc deux solutions à l'équation.

4. (a) On calcule $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = -\dfrac{2\ln(n)}{n} + \ln(2)$. Cette expression s'annule si $2\ln(n) = n\ln(2)$, soit en passant tout à l'exponentielle $n^2 = 2^n$.

   (b) Le nombre 2^n étant pair, n^2 est pair, et n aussi (le carré d'un nombre entier a toujours la même parité que le nombre lui-même). On peut donc poser $n = 2p$ pour trouver la condition équivalente $(2p)^2 = 2^{2p}$, soit $4p^2 = 2^{2p}$, ou encore $p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2$, ce qui implique bien $p = 2^{p-1}$ (tous ces nombres sont positifs).

   (c) L'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque $p = 1$ (puisque $2^0 = 1$) et lorsque $p = 2$ (puisque $2^1 = 2$), ce qui correspond aux deux solution suivantes de l'équation $f(x) = 0$: $x = \dfrac{1}{(2 \times 1)^2} = \dfrac{1}{4}$, et $x = \dfrac{1}{(2 \times 2)^2} = \dfrac{1}{16}$. Ce sont évidemment les seules solutions de cette équation, puisqu'on sait qu'elle n'en possède que deux.

5. Il ne reste plus qu'à faire le lien avec l'équation de départ : pour un x nécessairement positif, $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ donne, en passant tout au ln, l'équation équivalente $\sqrt{x}\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, soit $f(x) = 0$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les deux réels $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = \dfrac{1}{16}$.

Exercice 7 (**)

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

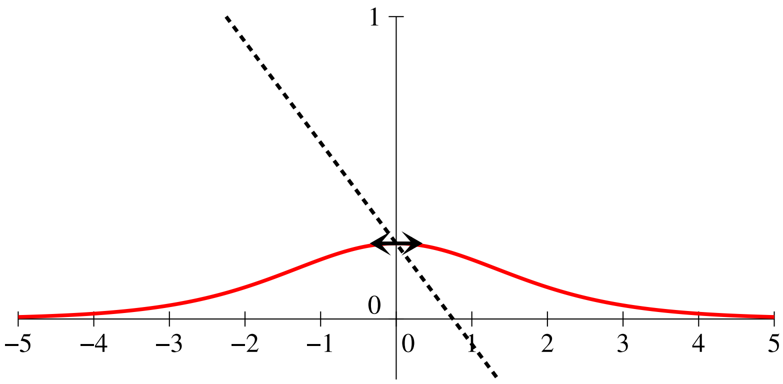
2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.

3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).

4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \dfrac{e^x(1 + e^x) - 2e^{2x}}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1 + e^x)^3} = \dfrac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1 + 1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.
8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



Exercice 8 (**)

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant paire, f_n est de même parité que $x \mapsto x^n$, elle est donc paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. Le domaine de définition de f_n est $\mathbb{R}$ tout entier. En exploitant la parité, on peut se contenter de calculer la limite de f_n en $+\infty$. En écrivant par exemple $f_n(x) = (x^2)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2}$, puis en posant $X = x^2$, on se ramène à un cas tout à fait classique de croissance comparée : $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X^{\frac{n}{2}} = +\infty$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$. Que la fonction soit paire ou impaire ne change rien, la limite en $-\infty$ sera également nulle. La seule asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ est donc l'axe des abscisses, asymptote horizontale valable en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, soit $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire) :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

Passons désormais à $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$. On calcule cette fois $f_2'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$, dérivée qui s'annule en 0 et en ± 1. On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair, et pour $x = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) = \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$. On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

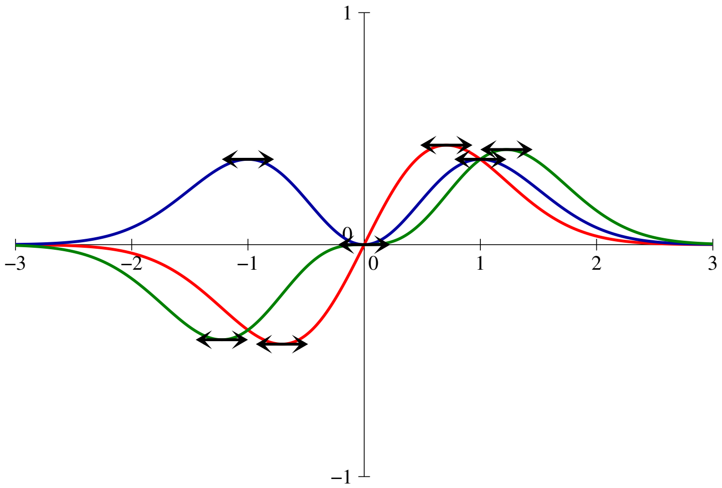
x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

Et si n est pair :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

5. Même pas besoin de mettre y_n sous forme exponentielle pour se rendre compte que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Il n'y a donc pas de majorant commun à toutes les fonctions.
6. Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^ne^{-x^2} - x^{n+1}e^{-x^2} = x^n(1-x)e^{-x^2}$. La courbe $\mathcal{C}_n$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et en-dessous sur $[1,+\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$. Sur $\mathbb{R}^-$, $\mathcal{C}_n$ est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n(1-x^2)e^{-x^2}$. Si n est pair, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $[-1,1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0,1]$ et sur $]-\infty,-1]$ et en-dessous le reste du temps.
7. Calculons donc $f_1''(x) = -4xe^{-x^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2} = (4x^3-6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule trois fois, pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. On pose donc $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, et on calcule $f_1(a) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$, ainsi que $f_1'(a) = (1-3)e^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{e\sqrt{e}}$. Ce qui donne comme équation pour la tangente $y = -\dfrac{2}{e\sqrt{e}}\left(x - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}} = \dfrac{-2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$.

8. Voici les allures : $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu, $\mathcal{C}_3$ en vert :



Exercice 9 (**)

1. La fonction f est définie lorsque $\text{ch}(x) > 0$, c'est-à-dire tout le temps, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Calculons donc : $f(0) = 0 + 2\ln(1) = 0$; $f(\ln(2)) = \ln(2) + 2\ln\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{2}\right) = \ln(2) + 2\ln(5) - 2\ln(4) = 2\ln(5) - 3\ln(2)$; et enfin $f(-\ln(3)) = -\ln(3) + 2\ln\left(\frac{\frac{1}{3}+3}{2}\right) = -\ln(3) + 2\ln(5) - 2\ln(3) = 2\ln(5) - 3\ln(3)$.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 + 2\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 1 + \frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Cette dérivée est du signe de $3e^x - e^{-x} = e^{-x}(3e^{2x} - 1)$. Elle s'annule lorsque $e^{2x} = \frac{1}{3}$, soit $2x = -\ln(3)$, donc $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$. La dérivée est négative avant cette valeur d'annulation, positive après. De plus, $e^{-\frac{1}{2}\ln(3)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = \sqrt{3}$, donc le minimum de notre fonction vaut $f\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\frac{4}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln(2) - 2\ln(\sqrt{3}) = 2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3) \simeq -0.25$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant (en ajoutant dedans les calculs de limites effectués ensuite) :

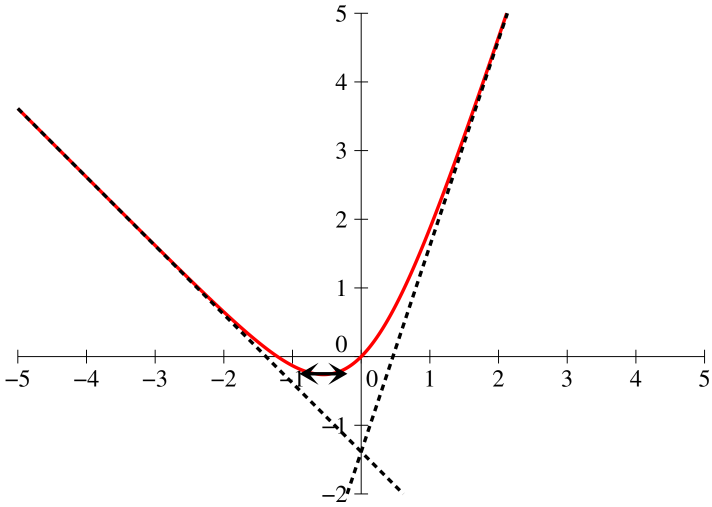
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$2\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$	↗ $+\infty$

4. On peut écrire $\text{ch}(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{2}$ et en déduire que $f(x) = x + 2\ln\left(\frac{e^x(1+e^{-2x})}{2}\right) = x + 2x + 2\ln(1+e^{-2x}) - 2\ln(2)$, ce qui correspond exactement à la formule de l'énoncé. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), on en déduit facilement, d'une part que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et d'autre part que la droite d'équation $y = 3x?2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe (puisque l'écart entre $f(x)$ et cette valeur tend vers 0). La position relative

est donnée par le signe de $\ln(1+e^{-2x})$. Or, e^{-2x} étant toujours positif, ce nombre est lui-même toujours positif : la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

5. C'est extrêmement similaire : $\text{ch}(x) = \dfrac{e^{-x}(1+2e^{x})}{2}$, puis $f(x) = -x + 2\ln(1+e^{2x}) - 2\ln(2)$. Les conclusions sont également très proches : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, et la droite d'équation $y = -x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe, cette dernière étant toujours située au-dessus de son (autre) asymptote.

6. Eh bien, une petite courbe pour finir :



Exercice 10 (**)

1. On a bien entendu $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et il suffit d'invoquer les résultats de croissance comparée du cours pour affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$.

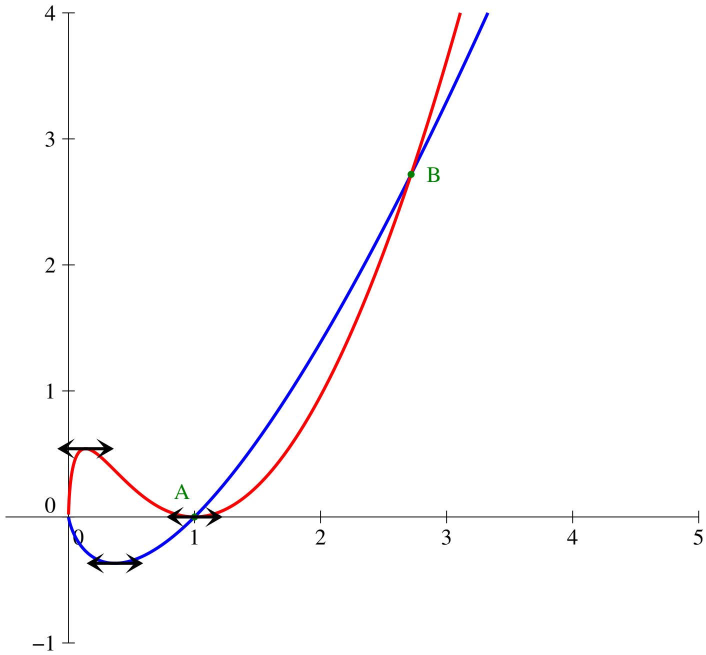
2. La fonction $f_1 : x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f_1'(x) = \ln(x) + 1$. Cette dérivée s'annule en $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et la fonction f_1 y admet un minimum de valeur $f_1\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times (-1) = -\dfrac{1}{e}$. On peut donc dresser le tableau suivant pour la fonction f_1 :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Passons à $f_2 : x \mapsto x\ln^2(x)$. Cette fonction est également dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f_3'(x) = \ln^2(x) + x \times \dfrac{2\ln(x)}{x} = \ln(x)(\ln(x)+2)$. Cette dérivée va donc s'annuler en $x = 1$ et en $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$. Calculons $f_2(1) = 0$ et $f_2\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$ avant de dresser un tableau de variations complet :

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Résolvons donc : $x\ln(x) = x\ln^2(x)$ se produit lorsque $x = 0$ (valeur n'appartenant pas à notre domaine de définition), $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1$, ce qui donne deux solutions : $x = 1$ et $x = e$. Comme $f_2(x) - f_1(x) = x\ln(x)(\ln(x) - 1)$, qui est du signe de $\ln(x)(\ln(x) - 1)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, la courbe $\mathcal{C}_1$ sera en-dessous de $\mathcal{C}_2$ sur l'intervalle $[1, e]$, et au-dessus sur $]0, 1]$ et sur $[e, +\infty[$. Plus généralement, on aura toujours $f_n(1) = 0$ et $f_n(e) = e$, ce qui prouve que toutes les courbes passent par les deux points $A(1, 0)$ et $B(e, e)$.
4. C'est le même raisonnement que ci-dessus : on calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x\ln^n(x)(\ln(x) - 1)$. Lorsque n est un entier pair, cette différence est du signe de $\ln(x) - 1$, donc $\mathcal{C}_{\backslash+\infty}$ sera en-dessous de $\mathcal{C}_n$ sur $]0, e]$ et au-dessus sur $[e, +\infty[$. Quand n est un entier impair, il y a un changement de signe supplémentaire quand $x = 1$ (puisque $\ln^n(x)$ y change alors de signe), donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ seulement sur l'intervalle $[1, e]$, et au-dessus sur $]0, 1]$ et sur $[e, +\infty[$ dans ce cas.
5. Toutes les courbes correspondant à des valeurs paires de n seront situées au-dessus de l'axe des abscisses sur $]0, 1[$, et celles correspondant à des valeurs impaires de n seront en-dessous. La seule chose à comparer est donc la position des courbes « paires » (entre elles) et celle des courbes »impaires ». Pour celà, on peut calculer $f_{n+2}(x) - f_n(x) = x\ln^n(x)(\ln^2(x) - 1)$. Le facteur $x\ln^n(x)$ est de signe constant sur $]0, 1[$ (positif si n est pair, négatif si n est impair), et $\ln^2(x) - 1$ change de signe lorsque $\ln(x) = -1$ (et aussi lorsque $\ln(x) = 1$ bien entendu, mais c'est en-dehors de notre intervalle d'étude), soit lorsque $x = \dfrac{1}{e}$. Ca facteur est positif sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et négatif sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$. On en déduit que les courbes « paires » sont « de plus en plus haut » (la courbe $\mathcal{C}_{2p}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{2p}$ si $k > p$ sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et « de plus en plus bas » sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$. C'est le contraire pour les courbes « impaires ».
6. Voici les courbes, $\mathcal{C}_1$ en bleu, $\mathcal{C}_2$ en rouge :



7. Dérivons donc la fonction f_n : $f_n'(x) = \ln^n(x) + x \times \dfrac{n\ln^{n-1}(x)}{x} = \ln^{n-1}(x)(\ln(x)+n)$. Cette dérivée s'annule en $x = 1$ et lorsque $\ln(x) = -n$, soit $x = \dfrac{1}{e^n}$. On calcule donc $f_n\left(\dfrac{1}{e^n}\right) = \dfrac{1}{e^n} \times (-n)^n = \left(-\dfrac{n}{e}\right)^n$. On obtient le tableau de variations suivant lorsque n est pair (et donc que $\ln^{n-1}(x)$ est toujours positif) :

x	0		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_1	‖ 0	↘	$-\frac{n^n}{e^n}$	↗	$+\infty$

Et le tableau suivant lorsque n est pair :

x	0		1		$\frac{1}{e^n}$		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	‖ 0	↗	$\frac{n^n}{e^n}$	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice 11 (***)

1. La seule chose pouvant poser problème est de qui se trouve dans le ln, f est donc définie en x si $\dfrac{x+2}{x} > 0$, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ (normalement, pas besoin d'écrire un tableau de signes pour un cas aussi simple).

2. (a) Lorsque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x\ln(x+2) - x\ln(x) + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$. Les résultats classiques de croissance comparée nous permettent d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et le reste ne pose

aucun problème, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

(b) Lorsque $x > 0$, on a $\ln(x+2) > \ln(x)$ (puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$), donc $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$ et $f(x) > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, ce qui suffit bien entendu à affirmer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour répondre tout à fait complètement à la question, on peut signaler que, sur $]-\infty, -2[$, on peut écrire $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = x\ln(-x-2) - x\ln(-x)$, et on en déduit que $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 0$ comme précédemment.

(c) Posons donc $x = \frac{2}{u}$, on a alors (en multipliant numérateur et dénominateur par u) $\frac{x+2}{x} = \frac{2+2u}{2} = 1+u$, donc $x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2\frac{\ln(1+u)}{u}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} u = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (limite classique vue en cours). La limite demandée dans l'énoncé en découle immédiatement, et on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2$, ou encore que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{4} - \frac{5}{2} = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Elle l'est d'ailleurs également en $-\infty$ puisque le même calcule reste valable.

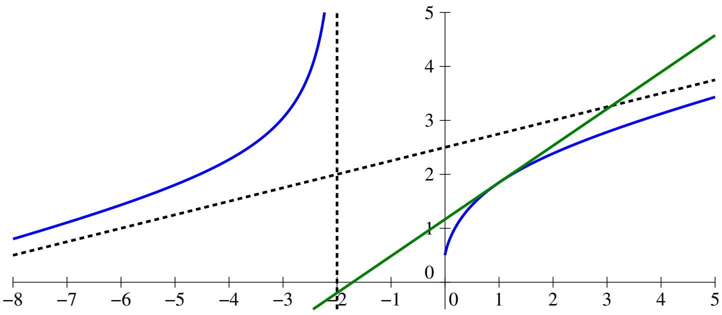
3. (a) Commençons par remarquer qu'en posant $h(x) = \frac{x+2}{x}$, on aura $h'(x) = \frac{x-(x+2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$. On en déduit que $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Autrement dit, on aura $g(x) = f'(x)$ partout où g est définie, autrement dit sur $\mathbb{R}^{+*}$ (alors que f' est quant à elle définie également sur $]-\infty, -2[$).

(b) Dérivons donc g : $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2}$
$= \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x - x^2 - 4x - 4 + 2x}{x(x+2)^2} = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, expression strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction g est donc strictement décroissante. De plus, $\lim x \to 0^+ g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée, donc aucune difficulté) et on peut écrire $g(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ pour se convaincre que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$.

(c) En effet, g est bijective de $]0, +\infty[$ vers $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$, et en particulier strictement positive. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Reste à gérer l'intervalle $]-\infty, 2[$, sur lequel on peut écrire $f'(x) = \ln(-x-2) - \ln(-x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Cette expression a exactement la même dérivée que la fonction g étudiée à la question précédente, on a donc toujours $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, ce qui prouve que f' est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$. Or, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \frac{1}{4}$ (même calcul sans difficulté qu'en $+\infty$), donc f' est strictement positive sur $]-\infty, -2[$. Il ne reste plus qu'à calculer les limites manquantes pour f pour pouvoir dresser un tableau de variations complet : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ à cause de la présente de l'asymptote oblique déjà signalée, et $\lim_{x\to-2^-} \frac{x+2}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$. Le tableau complet :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	‖ ‖	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On calcule donc $f(1) = \ln(3) + \dfrac{3}{4}$ et $f'(1) = \ln(3) - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \ln(3) - \dfrac{5}{12}$. La tangente recherchée a donc pour équation $y = \left(\ln(3) - \dfrac{5}{12}\right)(x-1) + \ln(3) + \dfrac{3}{4} = \left(\ln(3) + \dfrac{5}{12}\right)x + \dfrac{7}{6}$. Le coefficient directeur de la tangente est donc $\ln(3) - \dfrac{5}{12} \simeq 1.1 - 0.4 \simeq 0.7$, et son ordonnée à l'origine $\dfrac{7}{6} \simeq 1.2$.
5. Voici la courbe demandée (en bleu, avec la tangente de la question précédente en vert) :



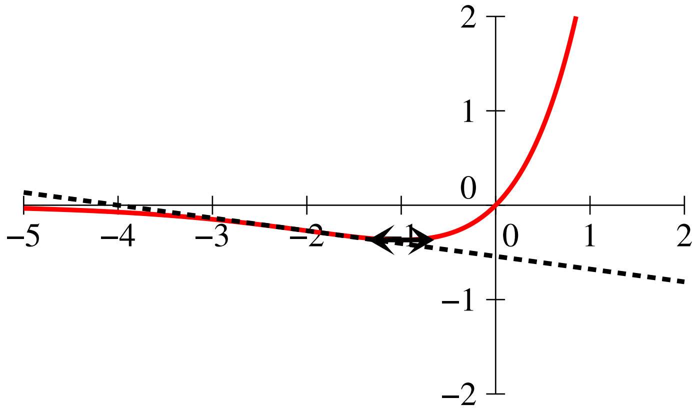
Problème 1 (***)

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\dfrac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\dfrac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{e^2}(x+2) - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x = -4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \dfrac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \dfrac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme elle vaut $-\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^2} = 0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \dfrac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty; -2]$, et en-dessous sur $[-2; +\infty[$.
3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\frac{1}{e};+\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$ $\qquad$ $+\infty$
f	$-1 \nearrow +\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$, $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.
6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\dfrac{g(-\ln(2)}{\ln(2)}$.
7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)} = 3$, soit $x\ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $\ln(X) = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1+2af(x))$, qui est du signe de $2af(x) - 1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a+2)$.
2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite,

$\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} h_a(m_a) = 1$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

I. Une inégalité classique.

1. Posons donc $f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$, et étudions les variations de f sur l'intervalle $[0,1]$: la fonction est évidemment dérivable, et $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$, dérivée ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et s'annulant en $x_1 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et en $x_2 = \dfrac{4+2}{6} = 1$. Elle est positive sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, et croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$. La fonction atteint donc comme maximum sur l'intervalle $[0,1]$ la valeur $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}$. On a exactement prouvé ce qui était demandé.

2. (a) On va bien entendu passer par un calcul de dérivée : $f_a'(x) = -2ax + a(1-a)$. Elle s'annule en $x = \dfrac{a(1-a)}{2a} = \dfrac{1-a}{2}$, qui appartient bien sûr à l'intervalle $[0, 1-a]$. La dérivée étant positive avant cette valeur et négative après, la fonction f_a admet pour maximum la valeur $f\left(\dfrac{1-a}{2}\right) = -a\dfrac{(1-a)^2}{4} + a(1-a)\dfrac{1-a}{2} = \dfrac{a(1-a)^2}{2}$.

   (b) Commençons par fixer la valeur de a, le réel b varie alors entre 0 et $1-a$ (les trois réels étant positifs et de somme 1), et $c = 1 - a - b$, donc $abc = ab(1-a-b) = -ab^2 + a(1-a)b$. La question précédente nous assure que cette valeur est maximale si $b = \dfrac{1-a}{2}$, ce qui revient à dire que $c = b$. Cherchons désormais la valeur de a pour laquelle abc est maximale en imposant $c = b = \dfrac{1-a}{2}$. On a alors $abc = \dfrac{a(1-a)^2}{4}$, qui est majoré d'après la première question par $\dfrac{1}{27}$ (il suffit de tout diviser par 4). Cela prouve que, dans les conditions données, $abc \leqslant \dfrac{1}{27}$.

   (c) Pour maximiser abc, il faut avoir d'une part $c = b = \dfrac{1-a}{2}$, puis $a = \dfrac{1}{3}$ (question 1), ce qui impose $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

3. Posons $a = \dfrac{x}{x+y+z}$, $b = \dfrac{y}{x+y+z}$ et $c = \dfrac{z}{x+y+z}$. Ces trois réels a, b et c sont positifs et vérifient $a+b+c = \dfrac{x+y+z}{x+y+z} = 1$. En appliquant les résultats précédents, $abc \leqslant \dfrac{1}{27}$. En multipliant trois fois par $x+y+z$, on trouve exactement $xyz \leqslant \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$. Un seul cas extrêmement particulier : si $x = y = z = 0$, on ne peut pas diviser par $x+y+z$, mais dans ce cas, l'inégalité demandée est triviale !

4. C'est une égalité si $a = b = c$, ce qui revient exactement à dire que $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

1. Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours plus grande que le troisième côté. Ici, par exemple, $a \leqslant b + c$, donc $2a \leqslant a + b + c = 2p$, ce qui implique $2p - 2a \geqslant 0$ et donc $x \geqslant 0$. C'est exactement similaire pour les deux autres côtés.
2. Le périmètre p étant fixé, $\mathcal{A}$ est maximale quand $(p-a)(p-b)(p-c)$ est maximale d'après la formule de Héron, donc quand xyz est maximal. Le maximum de xyz est égal à $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$. Or, $x + y + z = 3p - a - b - c = 3p - 2p = p$, donc le maximum de xyz vaut $\dfrac{p^3}{27}$, et celui de $\mathcal{A}$ est égal à $\sqrt{p \times \dfrac{p^3}{27}} = \dfrac{p^2}{\sqrt{27}}$.
3. Puisqu'on doit avoir $x = y = z$, cela revient à dire que $a = b = c$. Autrement dit, le triangle est alors équilatéral.

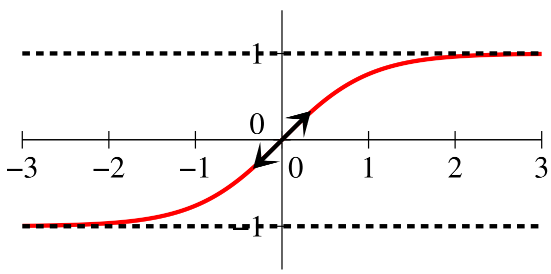
Problème 3 (***)

I. Étude de la fonction th.

1. La fonction ch étant toujours strictement positive, th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\text{th}(x) = \dfrac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Enfin, la fonction th est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire.
2. Calculons, par exemple à l'aide de la deuxième forme donnée à la question précédente : $\text{th}'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^x(e^x+e^{-x}))^2} = \left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$. Comme par ailleurs $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$, les deux formules sont bien équivalentes. La fonction th a donc une dérivée strictement positive, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sous sa deuxième forme, le calcul de limite en $-\infty$ est immédiat : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x) = \dfrac{-1}{1} = -1$. Par imparité de la fonction th, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$. La fonction th est donc bijective (en tant que fonction continue strictement monotone) de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. On peut dresser si on le souhaite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

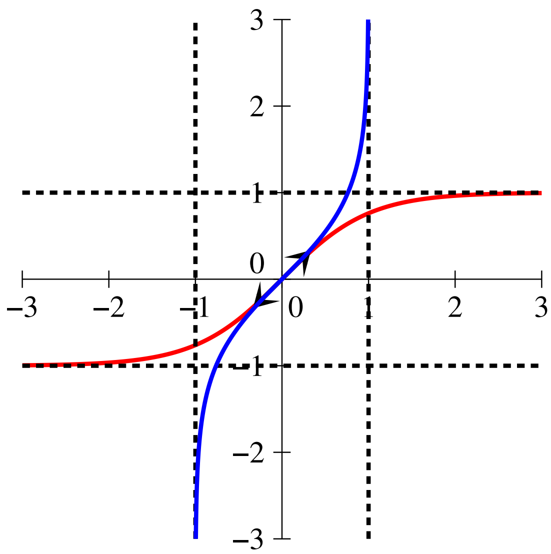
3. Puisque $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, la tangente à l'origine a pour équation $y = x$. Une allure de la courbe :



4. Un calcul immédiat donne $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$. Les deux formules à démontrer se résument alors aux égalités $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x-y} = e^{-x}e^{-y}$, qui découlent des propriétés bien connues de la fonction exponentielle.
5. En développant tout brutalement, $\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$, et $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$. En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$. En faisant la différence et en divisant par 2, on a cette fois $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$.
6. On peut faire le même calcul que pour la formule d'addition des tangentes : on divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas par $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)$, ce qui donne $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)} = \dfrac{\operatorname{th}(y) + \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

1. Pas besoin de calcul en effet, la réciproque est continue, strictement croissante, avec deux asymptotes verticales en -1 et en 1. Allez, les deux courbes ensembles :



2. On peut écrire $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))}$. Or, $\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = x$ quel que soit le réel x, donc $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
3. Puisque $y = \operatorname{argth}(x)$, on peut écrire $x = \operatorname{th}(y) = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$, soit $xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$. En regroupant différemment, on trouve bien $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$. Autrement dit, $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (pas de problème, tout est positif si $x \in]-1, 1[$). Cette expression est plus facile à dériver directement. Posons $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, alors $g'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, donc $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Ouf, on retrouve la bonne formule.
4. (a) La fonction f est définie à condition d'avoir $0 \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1} < 1$ (le quotient doit être positif à cause de la racine carrée, et la racine carrée doit ensuite être strictement inférieure à 1 pour que la composition par argth soit possible, donc le quotient lui-même doit être

strictement inférieur à 1). Comme on sait que ch est minorée par 1, on a toujours $0 \leqslant \operatorname{ch}(x) - 1 < \operatorname{ch}(x) + 1$, donc la fonction f est toujours définie. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(b) En reprenant les résultats précédents, $f(y) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1 + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1 - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} \right) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}} \right) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{y+1+y-1+2\sqrt{(y-1)(y+1)}}{(y+1)-(y-1)} \right) = \dfrac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

(c) En remplaçant y par $\operatorname{ch}(x)$, on trouve donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1})$. Or $\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = |\operatorname{sh}(x)| = \operatorname{sh}(|x|)$ (car la fonction sh est impaire). Comme la fonction ch, quant à elle, est paire, $\operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(|x|)$, et $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}(|x|) + \operatorname{sh}(|x|)) = \dfrac{1}{2} \ln(e^{|x|}) = \dfrac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle.

1. Les constantes solutions sont les réels k vérifiant $k = \dfrac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1 + k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.
2. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\dfrac{2\operatorname{th}(x)}{1+\operatorname{th}(x)^2} = \dfrac{\frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}} = \dfrac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$.
3. En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1 + f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.
4. On ose ? C'est complètement trivial ! En effet, en supposant f solution, $-f(2x) = \dfrac{-2f(x)}{1 + (-f(x))^2}$, donc $-f$ est aussi solution, et $f(2kx) = \dfrac{2f(kx)}{1 + f(kx)^2}$ en remplaçant simplement x par kx dans l'équation (ça doit être vrai pour tout réel, donc ça ne pose pas le moindre problème).
5. On peut toujours écrire $f(x) = \dfrac{2f(\frac{x}{2})}{1 + f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\dfrac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre -1 et 1 quelle que soit la valeur du réel t, la fonction f sera donc bornée par -1 et 1. On peut effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t+1)^2 \geqslant 0$ implique $2t \geqslant -t^2 - 1$, soit en divisant par $t^2 + 1$ (qui est positif), $\dfrac{2t}{t^2+1} \geqslant -1$. De même, comme $(t-1)^2 \geqslant 0$, on peut dire que $2t \leqslant 1 + t^2$, et en divisant à nouveau par $t^2 + 1$, on trouve cette fois-ci $\dfrac{2t}{t^2+1} \leqslant 1$. On a bien prouvé que $\dfrac{2t}{t^2+1} \in [-1; 1]$, soit en posant $t = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1; 1]$.