

# Feuilles d'exercices n° 2 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

14 septembre 2018

## Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La partie entière d'un nombre  $x$  négatif est toujours supérieure à  $x$ .
2. La dérivée d'une fonction réciproque est donnée par la formule  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$ .
3. Toutes les fonctions exponentielles sont strictement croissantes.
4. La fonction  $\log_a$  a pour réciproque la fonction  $x \mapsto a^x$ .
5. La fonction  $\text{ch}$  est une fonction paire.

## Exercice 1 (\*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2.  $f(x) = e^x \ln(x + 5)$
3.  $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$
4.  $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

## Exercice 2 (\* à \*\*)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2.  $f(x) = \ln|x|$
3.  $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4.  $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5.  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

## Exercice 3 (\*\* à \*\*\*)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1.  $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2.  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

3.  $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leq \ln 2$
4.  $\frac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geq -1$
5.  $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$
6.  $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2 \ln 2$
7.  $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4$
8.  $\ln(2x-3) \leq \ln 5$
9.  $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
10.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
11.  $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
12.  $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
13.  $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leq 4$
14.  $\begin{cases} x + y = 520 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$
15.  $4 \operatorname{ch}(x) + 3 \operatorname{sh}(x) - 4 = 0$
16.  $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$
17.  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$  (en posant  $X = x + \frac{1}{x}$ )

### Exercice 4 (\*\*)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2.  $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3.  $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4.  $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5.  $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

### Exercice 5 (\* à \*\*\*)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$
2.  $f(x) = x^x$
3.  $f(x) = \ln(1+x+x^2)$
4.  $f(x) = e^{x^2-x-1}$
5.  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$
7.  $f(x) = x^{x^2}$
8.  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$ ,  $a$  étant une constante positive fixée.

## Exercice 6 (\*\*)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) :  $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ .

1. On pose  $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + \ln(2)$ . Donner le domaine de définition de  $f$ , et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction  $f$ , et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  (on rappelle que  $\ln(2) \simeq 0.69$ , et  $\frac{1}{e} \simeq 0.36$ ).
4. On va chercher les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sous la forme  $x = \frac{1}{n^2}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) Montrer que  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$ .
  - (b) En déduire que  $n$  doit être pair puis, en posant  $n = 2p$ , que  $2^{p-1} = p$ .
  - (c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .
5. Conclure en donnant les solutions de l'équation (E).

## Exercice 7 (\*\*)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction  $f$  définie par l'équation  $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité de  $f$ .
3. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ , et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en son point d'abscisse  $\ln 2$ .
6. Démontrer que  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$ .
7. Montrer à l'aide de la question précédente que  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$ .
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ , et la courbe représentative de la fonction  $f$ .

## Exercice 8 (\*\*)

On définit pour tout entier naturel  $n$  la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ . On notera  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ .

1. Étudier la parité de la fonction  $f_n$  (on pourra distinguer deux cas).
2. Déterminer les limites de  $f_n$  aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que les éventuelles asymptotes à  $\mathcal{C}_n$ .
3. Calculer la dérivée  $f'_1$  de la fonction  $f_1$ , puis étudier ses variations. Faire également le tableau de variations de la fonction  $f_2$ .
4. Généraliser l'étude des variations à  $f_n$  (toujours en distinguant deux cas).

5. En notant  $y_n$  le maximum sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f_n$ , déterminer la limite de  $y_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Existe-t-il un majorant commun à toutes les fonctions  $f_n$  ?
6. Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$ , puis celle de  $\mathcal{C}_n$  et de  $\mathcal{C}_{n+2}$ .
7. Calculer la dérivée seconde  $f_1''$  de la fonction  $f_1$ , et déterminer les réels pour lesquels  $f_1''(x) = 0$ . Donner l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_1$  en son point d'abscisse  $a$ , où  $a$  est le seul réel strictement positif vérifiant  $f_1''(x) = 0$ .
8. Tracer une allure des courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  dans un même repère.

### Exercice 9 (\*\*)

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + 2 \ln(\operatorname{ch}(x))$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer les valeurs exactes de  $f(0)$ ,  $f(\ln(2))$  et  $f(-\ln(3))$ .
3. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  (sans limites pour l'instant).
4. En factorisant  $\operatorname{ch}(x)$  par  $e^x$  ; prouver que la droite d'équation  $y = 3x - 2 \ln(2)$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ . Préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire en  $-\infty$ , avec une factorisation légèrement différente du  $\operatorname{ch}$ .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de  $f$ , ainsi que de ses deux asymptotes obliques.

### Exercice 10 (\*\*)

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = x(\ln(x))^n$  (les fonctions  $f_n$  sont donc définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ), et on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ .

1. Quelles sont les limites de  $f_n$  aux bornes de son ensemble de définition ?
2. Effectuer l'étude des variations des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  (on dressera un tableau de variations complet à chaque fois).
3. Résoudre l'équation  $f_1(x) = f_2(x)$  et en déduire la position relative des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Vérifier plus généralement qu'il existe deux points du plan qui sont communs à toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$ .
4. Étudier plus généralement les positions relatives de  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .
5. Que peut-on dire des positions de toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$  sur l'intervalle  $]0, 1[$  (soyez le plus précis possible) ?
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .
7. Généraliser les résultats de la question 2 en étudiant les variations de  $f_n$  pour tout entier  $n \geq 1$  (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de  $n$ ).

### Exercice 11 (\*\*\*)

On définit la fonction  $f$  par l'équation  $f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ .

1. Préciser le domaine de définition de  $f$ .
2. On va commencer l'étude de  $f$  par celle de ses limites et asymptotes.
  - (a) Déterminer rigoureusement la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

- (b) Étudier le signe de  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ , et en déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- (c) En posant  $x = \frac{2}{u}$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$ . En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$ , dont on précisera l'équation.
3. On va maintenant passer à l'étude des variations.
- (a) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
- (b) On pose  $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ . Effectuer une étude complète de la fonction  $g$  (la courbe n'est pas demandée).
- (c) Déduire de la question précédente que,  $\forall x > 0, g(x) > 0$ , en déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de  $f$  en son point d'abscisse 1 (on donnera si besoin des valeurs approchées de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine).
5. Tracer la courbe représentative de  $f$  ainsi que la tangente calculée à la question précédente dans un même repère.

## Problème 1 (\*\*\*)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^x$ , et on note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

### I. Étude de $f$ et de sa réciproque.

- Étudier les variations et limites de la fonction  $f$ .
- (a) Déterminer la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$  et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur  $\alpha$ .
- (b) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à  $\mathcal{C}_f$  en son point d'abscisse  $\alpha$ . En quel point  $(T)$  coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- (c) Étudier la position relative de  $(T)$  et de  $\mathcal{C}_f$  (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
- Tracer dans un même repère  $(T)$  et  $\mathcal{C}_f$ .
- Montrer que la fonction  $f$  est bijective de  $[-1; +\infty[$  vers un intervalle à préciser. On note  $g$  la réciproque de la fonction  $f$  sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction  $g$ .
- Exprimer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$  en fonction de  $x$  et de  $g(x)$ , sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction  $g$ .
- Montrer que l'équation  $2^x = x$  admet pour solution  $x = -\frac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$  (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
- Exprimer de même une solution de l'équation  $x^x = 3$  en faisant intervenir la valeur  $g(\ln(3))$ .

### II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel  $a > 0$ , la fonction  $h_a$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$ .

- Établir le tableau de variations de la fonction  $h_a$  (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que  $h_a$  admet un minimum en un point  $m_a$  que l'on exprimera en fonction de  $a$  et à l'aide de la fonction  $g$ . Montrer que  $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$ .

2. On note enfin  $i$  la fonction  $i : a \mapsto m_a$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Étudier les variations de la fonction  $i$  ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de  $h_a$  est une fonction croissante du paramètre  $a$ , et déterminer sa limite lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

## Problème 2 : Un peu de géométrie ! (\*\*)

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

### I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que,  $\forall a \in [0, 1], a(1-a)^2 \leq \frac{4}{27}$ .
2. On fixe désormais une valeur de  $a \in [0, 1]$ , et on pose  $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$ .
  - (a) Déterminer le maximum de la fonction  $f_a$  sur l'intervalle  $[0, 1-a]$ .
  - (b) En déduire la propriété suivante : si  $a, b$  et  $c$  sont trois réels positifs tels que  $a + b + c = 1$ , alors  $abc \leq \frac{1}{27}$ .
  - (c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?
3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs  $x, y$  et  $z$ , on a  $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ .
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si  $x = y = z$ .

### II. Applications aux triangles.

Soit  $p > 0$ . On considère un triangle de côtés  $a, b$  et  $c$  tels que  $a + b + c = 2p$  (autrement dit,  $p$  est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire  $\mathcal{A}$  de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron :  $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

1. On note  $x = p - a, y = p - b$  et  $z = p - c$ , justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de  $\mathcal{A}$  (en fonction de  $p$ ).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?

## Problème 3 (\*\*\*)

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction : la fonction **tangente hyperbolique** ou **th** définie par  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

### I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que **th** est définie sur  $\mathbb{R}$  et que,  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ . Déterminer la parité de **th**.
2. Calculer la dérivée de la fonction **th** et vérifier que  $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ . En déduire le tableau de variations de **th** et prouver qu'elle est bijective de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $I$  à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction **th** en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.

4. Simplifier, pour un réel  $x$  quelconque, l'expression de  $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$  ainsi que celle de  $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$ . En déduire que,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{sh}(x + y) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y))$ , et  $\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{sh}(x + y) = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y))$ .
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer  $\operatorname{sh}(x + y)$  et  $\operatorname{ch}(x + y)$  en fonction de  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $\operatorname{ch}(y)$  et  $\operatorname{sh}(y)$ .
6. Démontrer que,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$ .

## II. Réciproque de la fonction $\operatorname{th}$ .

On note  $\operatorname{Argth}$  la fonction réciproque de la fonction  $\operatorname{th}$ , définie sur l'intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe de la fonction  $\operatorname{Argth}$ , si possible dans le même repère que celle de la question I.3.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction  $\operatorname{Argth}$ .
3. Soit  $x \in I$  et  $y = \operatorname{Argth}(x)$ . Montrer que  $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$ , et en déduire une expression de  $\operatorname{Argth}$  à l'aide de la fonction  $\ln$ . Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de  $\operatorname{Argth}$  est correcte.
4. On considère désormais la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1}}\right)$ .
  - (a) Déterminer la domaine de définition de  $f$ .
  - (b) En posant  $y = \operatorname{ch}(x)$ , montrer que  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ .
  - (c) En déduire que  $f(x) = \frac{|x|}{2}$ .

## III. Une équation fonctionnelle (pour aller beaucoup plus loin).

On cherche maintenant toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction  $\operatorname{th}$  est une solution du problème.
3. Soit  $f$  une solution, quelles sont les valeurs possibles de  $f(0)$  ?
4. Vérifier que, si  $f$  est solution,  $-f$  également, et  $g : x \mapsto f(kx)$  également (quelle que soit la valeur de  $k \in \mathbb{R}$ ).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction  $f$  sont comprises entre  $-1$  et  $1$ .