Feuille d'exercices n° 14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

20 février 2020

Vrai-Faux

1. Un sous-ensemble d'un espace vectoriel E qui est stable par somme et par produit par un réel est un sous-espace vectoriel de E.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace E est toujours un sous-espace vectoriel de E.
3. Une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est libre si et seulement si elle est génératrice.
4. Deux sous-espaces F et G d'un même espace E sont supplémentaires si $F \cap G = \{0\}$ et $F \cup G = E$.
5. Les espaces vectoriels classiques $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont de dimension n.

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique)

Exercice 2 (*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension ainsi qu'une base pour chacun d'eux.

1. $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2. $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3. $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4. $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5. $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x)\ dx = 0\}$
7. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x)\ dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8. $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9. $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

Exercice 3 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, et déterminer si possible les coordonnées de x dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1,1,1);(1,-1,1);(1,1,-1))$ et $x = (2,3,4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1;X;X(X-1);X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}\right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$; $x = (-2,3,4,1,0,0,\dots)$ (vous avez le choix pour $\mathcal{F}$!).

Exercice 4 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \mid 2x+y-3z = 0\}$ et $G = \{(2a+b, a-b, 3a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5 (*)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I,J,K,L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Exercice 6 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,y) \mid x+y = 0\}$ et $G = \{(x,y) \mid x-y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \mid x-y+z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P$ est une fonction paire$\}$ et $G = \{P \in E \mid P$ est une fonction impaire$\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1;1],\mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0\}$ et $G = \{$fonctions constantes$\}$.
- $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 7 (**)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1);(2,1,3,-1);(4,5,3,1))$.

1. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.
3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6,10,8,2)$.

Exercice 8 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera une base et la dimension.
2. Même question pour $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 9 (***)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F+G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 10 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de M.
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.

Exercice 11 (***)

On note dans tout cet exercice $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Déterminer un polynôme $P_1 \in E$ tel que $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$ et $P_1(5) = 0$ (on peut utiliser les polynômes de Lagrange, mais ce n'est pas une obligation).
2. Déterminer de même un polynôme P_3 vérifiant $P_3(1) = P_3(5) = 0$ et $P_3(3) = 1$, et un polynôme P_5 vérifiant $P_5(1) = P_5(3) = 0$, et $P_5(5) = 1$.
3. Démontrer que la famille (P_1, P_3, P_5) est une famille libre dans E.
4. Expliquer (sans refaire de calculs) pourquoi cette famille est en fait une base de E.
5. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - 3X - 1$ dans cette base.
6. Calculer $Q(1)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, les résultats sont-ils cohérents avec ce que vous avez obtenu à la question précédente ?
7. On note désormais $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ et, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0.
   (a) Calculer $f(X^5)$.
   (b) Expliquer pourquoi $f(P)$ appartient toujours à E.
   (c) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels $f(P) = 0$ (aucun calcul nécessaire).
   (d) Démontrer que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)P_1 + P(3)P_3 + P(5)P_5$.

Exercice 12 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on note $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -X\}$. Vérifier que G_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont on déterminera une base.
2. Même question pour $G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 2X\}$.
3. Montrer que G_1 et G_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. On note P la matrice carrée dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs d'une base de G_1 et d'une base de G_2 (peu importe l'ordre). Vérifiez que P est une matrice inversible et calculez P^{-1}.
5. Calculez $P^{-1}AP$.
6. (question indépendante du reste de l'exercice, et assez brutale). On note F l'ensemble des matrices commutant avec A, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, en donner une base et préciser sa dimension. On donnera également les coordonnées de la matrice A (qui appartient évidemment à F) dans cette base.

Exercice 13 (bac C 1975)

On considère l'ensemble E de toutes les suites réelles, muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle. Il est interdit dans tout l'exercice d'avoir recours à la moindre connaissance sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1. Soit $p \in]0,1[$ un nombre réel fixé. On note F l'ensemble des suites (u_n) de E vérifiant la relation de récurrence $pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer qu'une suite de F est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
   (b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Soit $v = (v_n)$ l'unique suite de F vérifient $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$; et $w = (w_n)$ l'unique suite de F vérifiant $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$. Vérifier que (v, w) est une famille libre de F, puis qu'elle est génératrice de F. En déduire la dimension de l'espace vectoriel F.
2. (a) Vérifier que, si $p = \frac{1}{2}$, les suites de F sont des suites arithmétiques.
   (b) On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite géométrique $t \mapsto t^k$ est dans F si et seulement si $pk^2 - k + 1 - p = 0$. En déduire l'existence d'une base de F formée de suites géométriques, et en déduire une expression générale de toutes les suites de F.
   (c) Soit i un entier fixé supérieur ou égal à 1. On cherche à déterminer une suite $u = (u_n)$ de F vérifiant $u_0 = 1$ et $u_i = 0$. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, exprimer le terme général de la suite u en fonction de n et de i.
   (d) Dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$, exprimer de même le terme général de u en fonction de n, de i et de $x = \frac{1-p}{p}$.
3. On considère désormais l'ensemble G des suites de E vérifiant la relation de récurrence $4u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.
   (a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3 (on pourra s'inspirer de la première question de l'exercice).
   (b) Déterminer les suites géométriques appartenant à G, et en déduire une base de G constituée de telles suites.
   (c) En déduire la forme générale des suites appartenant à G. Déterminer l'unique suite (u_n) de G vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $u_2 = \frac{7}{4}$.