Feuille d'exercices n° 5 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

17 octobre 2019

Vrai-Faux

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle y admet des primitives.
2. L'équation $xy' + y = \cos(x)$ admet une unique solution y vérifiant $y(0) = 0$.
3. Les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont de la forme $Ke^{A(x)}$, où A est une primitive de a.
4. L'équation caractéristique de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est $r^2 + ar + b = 0$.
5. Les solutions d'une équation du second ordre ayant un discriminant nul pour son équation caractéristique sont de la forme $(A + B)e^{rx}$.

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\ dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (en appliquant les quelques recettes vues en cours sur les fractions rationnelles) :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\ dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3}\ dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\ dx$
5. $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\ dx$

Exercice 4 (***)

Calculer les intégrales suivantes (en mélangeant diverses techniques vues en cours) :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin(t)}\ dt$ (on commencera par effectuer le changement de variables $u = \sin(t)$, puis on fera une décomposition en éléments simples)
2. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\ dx$ (on commencera par une IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ dx$ (on commencera par effectuer le changement de variables $t = \pi - x$)
4. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t))\ dt$ (on pourra effectuer deux IPP)
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(x)}\ dx$ (on effectuera le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, il pourra être utile d'exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t)

Exercice 5 (**)

On cherche à étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt$. On pourra utiliser dans tout l'exercice le résultat classique suivant : si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout réel $t \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.

1. Calculer les premières termes de la suite u_n (on s'arrête quand ça devient vraiment trop dur).
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, en déduire la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que $1 - u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n}\ dt$.
5. Montrer à l'aide d'une majoration de la fonction à l'intérieur de l'intégrale que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\ dt \leqslant \frac{1}{n+1}$.
6. En déduire la limite de $n(1-u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\ dx$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (on pourra par exemple exploiter un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction f définie et strictement monotone sur $[0, a]$, vérifiant $f(0) = 0$, et on note g sa réciproque.
   (a) On veut prouver que, $\forall x \in [0, a]$, $\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt = xf(x)$. Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.
   (b) Exprimer $\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt$ à l'aide de primitives F et G des fonctions f et g.
   (c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.
3. On veut calculer dans cette question $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\ dx$.
   (a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$.
   (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{x^2}{x^4+1}$, sous la forme $\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{P(x)}$.
   (c) Calculer l'intégrale J, et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en exploitant si besoin le résultat de la question 1).
4. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque g.
5. Calculer $\int_0^1 g(x)\ dx$ et appliquer la résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de I.

Exercice 7 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \text{sh}(x) - 2x\,\text{ch}(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\text{ch}(x)y' - \text{sh}(x)y = \text{sh}^3(x)$.

Exercice 8 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 9 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\ dt$.

Exercice 10 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 11 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 12 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2)\sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \dfrac{y'}{y}$).

Exercice 13 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \dfrac{1}{4}$, puis $h = \dfrac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 14 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \mathrm{sh}(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 15 (**)

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z. En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 16 (**)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2}y(t)$.

Exercice 17 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
3. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Exercice 18 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 19 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).

Exercice 20 (***)

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x) + 1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f.
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Problème (***)

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. Étudier les variations de la fonction f, en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f, ainsi que le tableau de variations de la fonction g.
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f, et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'annulation de f'' (on admettra qu'en ces points, la position relative de la tangente et de la courbe change au point d'intersection).
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle (E) : $2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
2. Déterminer deux constantes a et b telles que $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'unique solution définie sur $]0;1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0,1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Troisième partie : Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire (F) : $xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F).
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0;1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E).
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{k})^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0;1[$) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0;1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \dfrac{1}{2}$.