Feuille d'exercices n^o 9 : Dénombrement

PTSI B Lycée Eiffel

14 janvier 2020

Vrai-Faux

1. La formule du crible pour trois ensembles stipule que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B \cap C|$.
2. Le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.
3. Quand un problème fait intervenir des tirages successifs avec remise, on utilise des arrangements.
4. La formule du binôme de Newton est $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
5. La formule de Pascal peut s'énoncer : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 1 (*)

Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. Normalement, un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Sous ces conditions, combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Un élève au régime ne mange pas de dessert mais a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées. Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite. Combien ont-ils de menus possibles ?

Exercice 2 (**)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- Au moins une boule blanche a été tirée.
- Une boule noire au plus a été tirée.
- Trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre.
- Deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées.

Exercice 3 (**)

Dans un jeu de tarot (beurk !), il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- Au moins un atout est un multiple de cinq ?

- Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 4 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour au moins un parmi trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 5 (** à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel (re-beurk). Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 6 (***)

Soit E un ensemble fini comportant 6 éléments. On cherche à déterminer le nombre de couples de parties (A, B) de E vérifiant $A \cup B = E$ (par exemple, si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 5, 6\}$ constituent un couple possible).

1. Rappeler quel est le nombre de parties de E ayant 2 élements. Si on fixe une telle partie A, combien peut-on trouver de parties B vérifiant $A \cup B = E$?
2. Faire le même raisonnement pour les parties à 0, 1, 3, 4, 5 et 6 éléments de E.
3. En déduire la solution du problème posé.
4. Généraliser au cas où l'ensemble fini E possède n éléments (donner le résultat sous forme d'une somme puis la calculer à l'aide du binôme de Newton).

Exercice 7 (*)

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.

Exercice 8 (**)

De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 9 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 10 (***)

Donner une expression simple des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, on peut partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque ; ou exploiter la formule sans nom).

Exercice 11 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p+q+2 \leq n$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{2}-\binom{n-p}{2}-\binom{n-q}{2}+\binom{n-p-q}{2}=pq$.

Exercice 12 (**)

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n\times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre k (inférieur ou égal à np) sont noircies (et les autres blanches).

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n=p=k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

Exercice 13 (**)

On s'intéresse aux mots (concaténations de lettres) qu'il est possible de former avec l'alphabet $\{a,b,c\}$ et obéissant aux contraintes suivantes :

- le mot est de longueur n (il contient n lettres) ;
- il commence et finit par la lettre a ;

- deux lettres adjacentes sont toujours différentes.

Un tel mot sera dit *terne*.
On désigne par t_n le nombre de mots ternes de longueur n.

1. Déterminer tous les mots ternes pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6.
2. Montrer que pour tout entier n, $n \geq 3$, $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$.
3. Exprimer t_n en fonction de n.

Exerice 14 (***)

Soit E un ensemble fini à n éléments, par exemple $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Une application $f : E \mapsto E$ est une involution si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Une involution sans point fixe est une involution f pour laquelle aucun élément de E ne vérifie $f(x) = x$. On note T_n le nombre total d'involutions de E, et S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E.

1. Donner un exemple d'involution de E lorsque $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (pas trop trivial si possible). Est-il possible de créer une involution sans point fixe de E (justifier) ?
2. Donner les valeurs de T_i et S_i pour tous les entiers $i \leq 3$ en donnant simplement la liste de toutes les involutions possibles.
3. Montrer qu'on a toujours $S_n \leq T_n \leq n!$.
4. Soit $E = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2\}$.
   (a) On fixe un entier $k \in \{2, 3, \dots, n+1, n+2\}$. Déterminer en fonction de S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E vérifiant $f(1) = k$. En déduire que $S_{n+2} = (n+1)S_n$.
   (b) Par un raisonnement similaire, déterminer une relation de récurrence entre T_{n+2}, T_{n+1} et T_n.
5. Déduire des résultats de la question précédente une formule explicite pour S_n lorsque n est un entier pair.
6. Montrer que $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$, et en déduire une formule explicite pour T_n (sans chercher à se débarasser de la somme). Donner (à l'aide de la calculatrice) la valeur de T_{10} et la comparer à celle de 10!.

Problème 1 (***)

On considère dans tout cet exercice un ensemble fini E de cardinal n, et on va chercher à dénombrer l'ensemble de ses partitions vérifiant certaines propriétés.

1. Déterminer « à la main » le nombre de partitions de l'ensemble à un élément $E_1 = \{1\}$, puis de l'ensemble à deux éléments $E_2 = \{1; 2\}$, et enfin de l'ensemble à trois éléments $E_3 = \{1; 2; 3\}$ (l'ordre dans lequel apparaissent les sous-ensembles dans la partition n'est pas important).
2. Dans le cas général, déterminer le nombre de partitions de E constituées de n sous-ensembles, puis celles constituées de $n - 1$ sous-ensembles.
3. Dans le cas où $|E| = 10$ (on prendra par exemple $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$), déterminer le nombre de partitions de E en 8 sous-ensembles (on pourra considérer deux types de partitions).
4. Généraliser le résultat précédent en déterminant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en $n - 2$ sous-ensembles (pour $n \geq 3$).
5. On cherche dans cette question à déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles.
   (a) On suppose dans cette question que le premier sous-ensemble contient un seul élément (donc le deuxième en contient $n - 1$). Compter le nombre de telles partitions.

(b) Déterminer le nombre de partitions pour lesquelles l'un des deux ensembles contient 2 éléments, et l'autre $n-2$.

(c) En déduire une formule générale pour le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments, puis pour le nombre total de partitions de E en deux sous-ensembles. Calculer ce nombre.

6. On considère désormais des partitions constituées d'ensembles de cardinal 2 (partitions en paires). On note a_p le nombre de telles partitions de l'ensemble $\{1; 2; \dots; 2p\}$ (pour qu'une telle partition existe, l'ensemble doit nécessairement contenir un nombre pair d'éléments).

(a) Calculer « à la main » a_1, a_2 et a_3 (pour a_3, on pourra se contenter d'une bonne explication plutôt que de faire une liste complète).

(b) Démontrer que, $\forall p \geq 2$, $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.

(c) Déterminer une formule explicite pour a_p faisant intervenir un quotient de factorielles.

(d) En déduire de combien de façons on peut former 10 couples dans un groupe de 20 personnes (couples homosexuels autorisés !). Comparer au nombre de façon de former dix couples hétérosexuels avec 10 garçons et 10 filles.

Problème 2 (****)

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p, $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, vers l'ensemble $\{1; 2; \dots; p\}$. Un exemple de telle application pour $n = 3$ et $p = 2$ est $f : \{1; 2; 3\} \to \{1; 2\}$ définie par $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$. On convient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0} = 0$, et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{0,p} = 0$.

Première partie : exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convenables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,n}$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geq 2$, $u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n+1$ par une application surjective de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ dans $\{1; 2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).
3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n.
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geq 3$, $v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geq 3$, $v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.

3. On pose $\forall n \geq 3$, $w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
4. On pose désormais, $\forall n \geq 3$, $t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.
5. En déduire la valeur de t_n, puis celle de u_n et de w_n.
6. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ dans $\{1; 2; \dots; n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant deux antécédents par f.
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

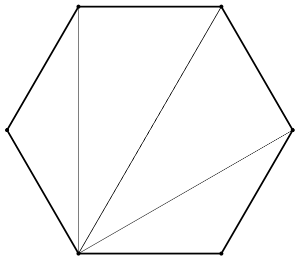
1. Montrer que, $\forall n \geq 2$, $\forall p \geq n$, $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leq k \leq p$, prouver que
$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2; \dots; p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} \binom{p}{j} S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).

Problème 3 : nombres de Catalan.

Ce problème présente quelques dénombrements classiques faisant intervenir une suite de nombres entiers appelés nombres de Catalan, ainsi que l'étude de quelques propriétés de ces nombres. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

I. Triangulations de polygônes.

Trianguler un polygône à n côtés consiste à tracer un certain nombre de cordes dans le polygône (segments reliant deux sommets non adjacents du polygône), de façon à la découper en triangles (les cordes ne doivent donc pas se couper). Ci-dessous, un exemple de triangulation d'un hexagone :



On notera dans cette partie t_n le nombre de triangulations distinctes d'un polygône à $n+2$ côtés (en convenant que $t_0 = 1$).

1. Déterminer les valeurs de t_1, t_2 et t_3 (on pourra faire des petits dessins pour illustrer).
2. Vérifier que $t_4 = 14$ en dessinant les 13 triangulations d'un hexagone régulier distinctes de celle donnée en exemple plus haut.
3. Soient A_1, A_2, ..., A_{n+3} les sommets d'un polygône à $n+3$ côtés. Quel est le nombre de triangulations du polygône contenant le triangle $A_1A_iA_{n+3}$ (pour $k \in \{2, \dots, n+2\}$) ? On exprimera le résultat en fonction des nombres t_i, pour des valeurs de i inférieures ou égales à n.
4. En déduire que, $\forall n \geq 1$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$.
5. Vérifier à l'aide de cette relation les valeurs des premiers termes de la suite (t_n), et calculer t_5 et t_6.

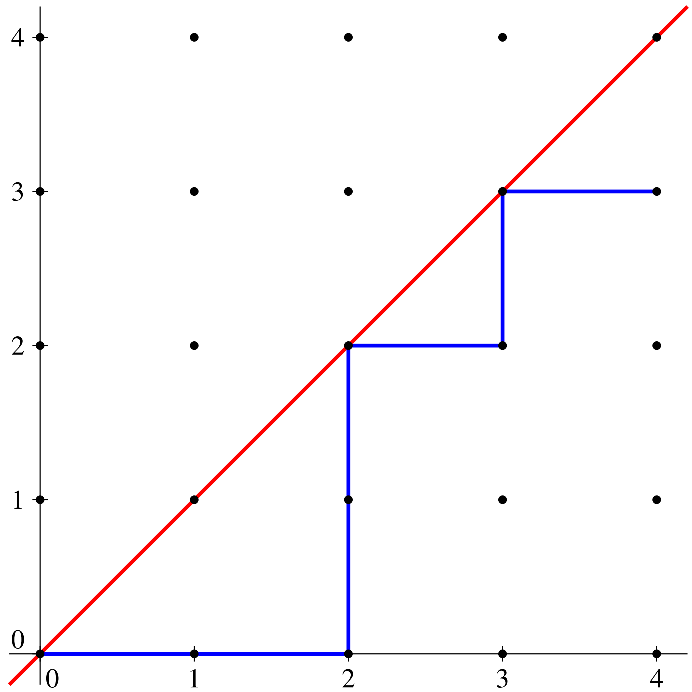
II. Une formule explicite.

On note dans cette section $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ (pour tout entier naturel n).

1. Calculer c_0, c_1, c_2 et c_3.
2. Expliquer pourquoi c_n est toujours un entier naturel.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.
4. Prouver toutes les relations suivantes : $c_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n}$.
5. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leq 4\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.
   (b) En déduire que $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 3 \times \dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
6. On note dans cette question $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$.
   (a) En effectuant le changement d'indice $i = n-k$, prouver que $T_n = \dfrac{n}{2} S_n$.
   (b) Montrer que $T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 3S_n$.
   (c) Prouver par récurrence, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, que $S_n = c_{n+1}$.
   (d) En comparant les relations de récurrence obtenues sur les suites (c_n) et (t_n) (de la première partie du problème), prouver rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

III. Le retour du dénombrement.

On considère dans cette partie des chemins menant dans le plan de l'origine du repère jusqu'au point de coordonnées (n, m), en respectant les conditions suivantes : à chaque pas, on se déplace d'une unité vers la droite, ou bien d'une unité vers le haut. On note Δ l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) situés sous la droite d'équation $y = x$ (c'est-à-dire tels que $x \leq y$), et on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins menant de $(0,0)$ à (n, m) et situés entièrement dans Δ (autrement dit, ne traversant pas la diagonale). Un exemple avec $(n, m) = (3, 4)$:



1. (a) Que vaut $\delta_{n,0}$ (pour tout entier n) ? Que vaut $\delta_{n,m}$ si $m > n$?
   (b) Justifier que $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geq 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ si $m < n$.
   (c) En déduire la valeur de $\delta_{n,1}$ (pour $n \geq 1$) et de $\delta_{n,2}$ (pour $n \geq 2$).
   (d) Donner la liste des $\delta_{n,m}$ pour toutes les valeurs de n et de m inférieures ou égales à 6, en les présentant sous forme d'un tableau de type « triangle de Pascal ». Comparer les valeurs « diagonales » $\delta_{n,n}$ à celles de t_n et de c_n obtenues dans les deux premières parties du problème.
2. (a) Montrer par récurrence sur n que $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{n}$.
   (b) En déduire que $\delta_{n,n} = c_n$.
3. (a) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0,0)$ à (n, n) sans croiser la diagonale Δ (ailleurs qu'en $(0,0)$ et en (n, n), bien évidemment) est égal à c_{n-1} (ou si vous préférez à $\delta_{n-1,n-1}$).
   (b) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0,0)$ à (n, n) en recoupant pour la première fois la diagonale en (k, k) est égal à $c_{k-1}c_{n-k}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\delta_{n,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k-1,k-1}\delta_{n-k,n-k}$.