Feuilles d'exercices n°21 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2020

Exercice 1 (*)

On a donc $P(X = 1) = P(Y = 1) = p$ et $P(X = 0) = P(Y = 0) = 1 - p$. On en déduit la loi suivante pour (U, V) (pas vraiment d'autre méthode que de procéder au cas pas cas, sachant qu'il n'y a que quatre possibilités) :

$U \backslash V$	-1	0	1	$P(U = i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$P(V = j)$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	

Les deux variables ne sont manifestement pas indépendantes : on a par exemple $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$, alors que $P(U = 0) \times P(V = 1) \neq 0$.

Exercice 2 (**)

Le mieux si on ne veut pas se perdre dans le remplissage du tableau est encore d'écrire tous les rangements possibles, au nombre de 27, et de compter. Sinon, on s'en sort sans : si $N = 0$, on a nécessairement $X = 1$ puisqu'on a alors une chaussette dans chaque tiroir, et cela se produit avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (six rangements possibles, on peut permuter les chaussettes). Si $N = 1$, soit $X = 0$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (trois cas avec une chaussette dans le deuxième tiroir et deux dans le troisième, trois autres cas où c'est le contraire), soit $X = 1$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (deux choix pour le tiroir où caser les deux chaussettes restantes, et trois choix de chaussette à mettre dans le premier tiroir), soit enfin $X = 2$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (essentiellement le même raisonnement que le cas précédent). Enfin, si $N = 2$, on a trois cas (il faut choisir le tiroir qui accueille les trois chaussettes), un pour lequel $X = 3$ et deux pour lesquels $X = 0$.

$X \backslash N$	0	1	2	$P(X = i)$
0	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$P(N = j)$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$	

Encore une fois, les deux variables ne sont pas du tout indépendantes.

Exercice 3 (**)

On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{in}$ si $j \leq i$, et 0 sinon (le numéro de la boule est toujours inférieur à celui de l'urne). En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Y = j)$, on a donc $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{in} = i \times \frac{1}{in} = \frac{1}{n}$. C'est sans surprise une loi uniforme, d'espérance $\dfrac{n+1}{2}$. Quand à Y, on a $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in}$ (ce qui ne se simplifie pas) et $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{in} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in}\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2n} = \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}$.

Exercice 4 (***)

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$, c'est-à-dire $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = a\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = a\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Via la formule des probabilités totales, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = ai\sum_{j=1}^{n} j = ai\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}$. Et donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$.
3. La loi de Y est la même que celle de X puisqu'obtenue par le même calcul.
4. On vérifie que $P(X = i) \times P(Y = j) = \dfrac{2i}{n(n+1)} \times \dfrac{2j}{n(n+1)} = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2} ij = aij = P((X = i) \cap (Y = j))$. Les deux variables sont donc indépendantes.
5. On a $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$.
6. Dans le cas d'un max, il est plus facile de commencer par calculer les probabilités $P(U \leq i)$. En effet, dire que $\max(X, Y) \leq i$ est équivalent à dire que X et Y prennent toutes les deux des valeurs inférieures à i. Les variables étant indépendantes, $P(U \leq i) = P(X \leq i)P(Y \leq i)$. Reste à calculer $P(X \leq i)\sum j = 1^i P(X = j) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{i(i+1)}{n(n+1)}$. On peut finir notre calcul : $P(U \leq i) = \dfrac{i^2(i+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. On en déduit que $P(U = k) = P(U \leq k) - P(U \leq k-1) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \dfrac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2((k+1)^2 - (k-1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2 \times 4k}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 5 (***)

1. L'évènement $X_2 = 1$ signifie qu'on tire au deuxième tirage une boule différente de celle tirée au premier, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{n+1}$. On en déduit que $X_2 \sim \mathcal{B}\left(1, \dfrac{n}{n+1}\right)$.
2. De même $X_i = 1$, si chacun des $i-1$ premiers tirages a donné une boule différente de X_i, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{n}{n+1}$ pour chacun, donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.

3. On a $X_i = 1$ et $X_j = 1$, si les tirages i et j donnent des résultats différents (probabilité $\dfrac{n}{n+1}$), si chacun des $i-1$ premiers tirages est différent du i-ème et du j-ème (proba $\dfrac{n-1}{n+1}$, $i-1$ fois) et si chacun des tirages entre le i-ème et le j-ème est différent du j-ème (proba $\dfrac{n}{n+1}$, $j-i-1$ fois), soit une probabilité globale de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{j-i}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{i-1} = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. Si X_i et X_j sont deux lois de Bernoulli, X_iX_j est aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la valeur calculée à la question précédente (puisqu'avoir $X_iX_j = 1$ équivaut à $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$).
5. La formule donnant $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$ n'est manifestement pas égale au produit de $P(X_i = 1)$ par $P(X_j = 1)$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
6. On a tout simplement $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.
7. On en déduit que $E(Z_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}{1-\frac{n}{n+1}} = (n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right)$.
   Lorsque p tend vers l'infini, comme $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p$ est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 tendant donc vers 0, cette espérance a pour limite $n+1$. C'est tout à fait logique, quand le nombre de boules tirées tend vers l'infini, on s'attend à tirer toutes les boules de l'urne, soit $n+1$ boules différentes.

Exercice 6 (***)

Commençons donc par le cas particulier où $n = 3$, ce qui permet encore de présenter sous forme de tableau. Les trois tableaux correspondent respectivement à $Z = 1$, $Z = 2$ et $Z = 3$. Il y a 27 tirages possibles au total, se répartissant comme suit :

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{27}$

Pour obtenir les trois lois marginales, il faut dans le cas de Z faire la somme tableau par tableau, et dans le cas de X et de Y faire les sommes par lignes et par colonnes, en ajoutant les résultats des trois tableaux. On obtient :

	1	2	3
X	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$
Y	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$
Z	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

Dans le cas général, c'est un peu plus formel mais pas beaucoup plus compliqué. Soient (i,j,k) trois entiers inférieurs à n. Si $i > j > k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \dfrac{6}{n^3}$ (il y a n^3 tirages au total, et 6 favorables, le nombre de permutations possibles des trois résultats). Si $i = j > k$ ou $i > j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \dfrac{3}{n^3}$, si $i = j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \dfrac{1}{n^3}$, et le reste du temps $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = 0$ (tous ces cas sont déjà présents dans le cas $n = 3$). On en déduit par la formule des probabilités totales que $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \sum_{i=j}^{n} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-k)\frac{3}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=j}^{n} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + 3\frac{n-k}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{3}{n^3} + 6\frac{n-j}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 6(n-k) + 3(n-k-1)(n-k))$. La loi de X est symétrique de celle de Z : $P(X = k) = P(Z = n+1-k) = \dfrac{1}{n^3}(1 + 6(k-1) + 3(k-2)(k-1))$. Enfin, $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{j} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-1)\frac{3}{n^3} + \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{6}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 3(n-1) + 6(j-1)(n-j))$. Vous pouvez vérifier que les formules marchent pour $n = 3$, voire pour $n = 4$ si vous êtes motivés.

Exercice 7 (**)

1. (a) Puisque les deux variables sont indépendantes, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2}$.

   (b) Si $k \leq n+1$, $P(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} P((X = i) \cap (Y = k - i))$. Mais si on veut avoir $1 \leq k-i \leq n$, on devra choisir des valeurs de i vérifiant $i \leq k-1$ (on aura toujours $k-i \leq n$ si $k \leq n+1$), donc $P(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$.

   (c) Si $k > n+1$, on doit de même se restreindre pour avoir cette fois $k - i \leq n$, ce qui impose $i \geq k - n$, donc $P(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Les variables $X + Y$ et Z sont indépendantes, on a donc $P(X + Y = Z) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} P(X + Y = k) \times P(Z = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n} k - 1 = \frac{(n-1)n}{2n^3} = \frac{n-1}{2n^2}$.

3. (a) $P(T = k) = P(n+1-Z = k) = P(Z = n+1-k) = \dfrac{1}{n}$ pour $1 \leq n+1-k \leq n$, c'est-à-dire pour $1 \leq k \leq n$. La variable aléatoire T a bien la même loi que Z.

   (b) On en déduit que $P(X + Y + Z = n+1) = P(X + Y = n+1-Z) = P(X + Y = T)$. Comme Z et T suivent la même loi, cette probabilité est la même que celle calculée un peu plus haut : $\dfrac{n-1}{2n^2}$.

Problème (***)

1. (a) Commençons par constater que $S_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $T_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ en appliquant la convention de l'énoncé pour le cas où il n'y a pas de Pile. Il n'y a que huit tirages possibles dans l'univers, faire la liste n'est donc pas bien compliqué. Un cas (PPP) correspond à $S_3 = 3$ et $T_3 = 1$, un autre (FPP) pour $S_3 = 2$ et $T_3 = 2$, deux (PPF et PFP) pour $S_3 = 2$ et $T_3 = 1$. Tros tirages correspondent à $S_3 = 1$, un pour chaque valeur de T_3 comprise entre 1 et 3, et le dernier cas, celui où on tire trois Face, donne $S_3 = T_3 = 0$. Soit le tableau suivant :

$T_3 \backslash S_3$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0	0

(b) On peut obtenir la loi marginale de T_3 en faisant les sommes des lignes du tableau précédent pour obtenir :

k	0	1	2	3
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Son espérance vaut $E(T_3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{11}{8}$.

(c) La variable S_3 est un cas classique de loi binomiale, de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(S_3) = \dfrac{3}{2}$.

(d) Les variables ne sont évidemment pas indépendantes, puisque par exemple $P(S_3 = 1 \cap T_3) = 0 \neq P(S_3 = 1) \times P(T_3 = 0)$.

(e) i. Calculer cette probabilité revient à additionner les probabilités sur la diagonale du premier tableau, ou si on préfère être savant, à calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(S_3 = k \cap T_3 = k)$. On obtient $P(T_3 = S_3) = \dfrac{3}{8}$.

ii. Puisque $P(T_3 \neq 0) = \dfrac{7}{8}$, une simple application de la définition donne $P_{T_3 \neq 0}(T_3 = S_3) = \dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{7}{8}} = \dfrac{2}{7}$.

iii. Toujours d'après la définition, $P_{S_3=2}(T_3 = 1) = \dfrac{P(S_3 = 2 \cap T_3 = 1)}{P(S_3 = 2)} = \dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

(f) Le plus simple est de reprendre le tableau de la loi de couple et de faire la liste des cas possibles : la variable S_3T_3 prend la valeur 0 avec probabilité $\dfrac{1}{8}$, la valeur 1 quand $S_3 = T_3 = 1$, avec probabilité $\dfrac{1}{8}$, la valeur 2 quand $S_3 = 1$ et $T_3 = 2$ ou $S_3 = 2$ et $T_3 = 1$, avec une probabilité $\dfrac{2}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$, la valeur 3 avec probabilité $\dfrac{2}{8}$ (deux cas possibles) et enfin la valeur 4 avec probabilité $\dfrac{1}{8}$ (quand $S_2 = T_2 = 4$). Autrement dit, $S_3T_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et la loi est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(S_3T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

On calcule ensuite facilement $E(S_3T_3) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{6}{8} + \dfrac{6}{8} + \dfrac{4}{8} = \dfrac{17}{8}$, puis $\dfrac{E(S_3T_3}{E(S_3)E(T_3)} = \dfrac{\frac{17}{8}}{\frac{11}{8} \times \frac{3}{2}} = \dfrac{34}{33}$, ce qui est une valeur très proche de 1.

2. (a) La probabilité $P_{S_n=1}(T_n = 0)$ est évidemment nulle, puisqu'on a forcément obtenu un Pile si $S_n = 1$. Pour les autres valeurs de k, on constate que $P(S_n = 1) = \dfrac{n}{2^n}$ (il y a 2^n tirages possibles au total, dont exactement n avec un seul Pile puisqu'il suffit de choisir le rang du Pile). De même, $P(S_n = 1 \cap T_n = k) = \dfrac{1}{2^n}$ (si $k \neq 0$), puisqu'un seul tirage correspond à cet événement. Autrement dit, $P_{S_n=1}(T_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et n. Cela revient à dire que la loi de T_n sachant $S_n = 1$ est une loi uniforme, ce qui n'a effectivement rien de surprenant : si on sait à l'avance qu'on va obtenir un seul Pile, il a autant de chances d'être obtenu à chacun des tirages effectués.

   (b) Sans difficulté, $T_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. On a facilement $P(T_n = 0) = \dfrac{1}{2^n}$ (il faut obtenir Face à tous les tirages), $P(T_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ (Pile au premier tirage, indépendamment de ce qui se passe ensuite), $P(T_n = 2) = \dfrac{1}{4}$ (on commence par un Face, puis un Pile au deuxième tirage), et plus généralement $P(T_n = k) = \dfrac{1}{2^k}$ pour $k \neq 0$ (l'événement $T_n = k$ correspond à obtenir $k - 1$ Face puis un Pile lors des k premiers tirages).

   (c) L'espérance de T_n (en oubliant la valeur 0 qui n'intervient pas dans le calcul) est donc donnée par $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, ce qui correspond à un facteur $\dfrac{1}{2}$ près à la somme partielle d'une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1}{2}$. Pour ne pas refaire un calcul pénible, rappelons qu'on a vu dans le cours que cette somme partielle, pour une raison x différente de 1, valait $\dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$. Ici, on en déduit que $E(T_n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{\frac{1}{4}} = \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{n+1}{2^{n-1}} + 2 = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. On vérifie que la formule est correcte pour $n = 3$, puis on constate que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = 2$ (limites classiques ici, le numérateur est négligeable devant le dénominateur dans la fraction).

   (d) Comme précédemment, la variable S_n suit une loi binômiale, désormais de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$. L'inégalité $S_nT_n \geq S_n$ est très facile : T_n ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1 (ce qui implique évidemment $S_nT_n \geq S_n$), sauf lorsque $T_n = S_n = 0$, auquel cas l'inégalité reste vraie. On en déduit que $E(S_nT_n) \geq E(S_n) = \dfrac{n}{2}$.

   (e) Quand $T_n = 0$, S_n <prend automatiquement la valeur 0 également. Si $k \neq 0$, le fait que $T_n = k$ implique que la suite de lancers a commencé par $k - 1$ Face, et ne peut donc contenir plus de $n - (k-1) = n + 1 - k$ Pile. Elle en contient par ailleurs au moins un, donc S_n prend toutes les valeurs entre 1 et $n + 1 - k$.

   (f) Notons f la fonction, c'est une fonction du second degré, de dérivée $f'(x) = n+1-2x$. Cette dérivée s'annule en $x = \dfrac{n+1}{2}$, et f admet en ce point un maximum de valeur $f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$. D'après la question précédente, lorsque $T_n = k$, on a $S_n \leq n+1-k$. Autrement dit, $S_n \leq n + 1 - T_n$ (cela reste vrai pour la valeur 0), donc $S_nT_n \leq T_n(n + 1 - T_n)$. La variable T_n prenant des valeurs inférieures ou égales à $n + 1$, on déduit de l'étude de fonction qu'on a toujours $S_nT_n \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$, ce qui implique que son espérance est également inférieure à cette valeur. Si on veut être très précis, la valeur maximale prise par S_nT_n est $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ lorsque n est impair, mais si n est pair, le nombre $\dfrac{n+1}{2}$ n'est plus entier, et la valeur maximale devient égale à $f\left(\dfrac{n}{2}\right) = f\left(\dfrac{n}{2}+1\right) = \dfrac{n(n+1)}{4}$.

3. (a) En utilisant la formule donnée, $\dfrac{n+2}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k} \leq E(S_nT_n) \leq \dfrac{n+2}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ (la somme qu'on retranche étant évidemment positive). À droite, on sait que la somme converge en croissant vers 2 (calculs de série géométrique dérivée faits dans la partie précédente), donc le membre de droite est bien majoré par 2. À gauche, il faudrait réussir à majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\times\frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{1}{4}\times\frac{k}{2^{k-1}}$, le premier morceau est au facteur $\dfrac{1}{8}$ près la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde. On n'a pas vu la formule en cours, mais un calcul tout à fait similaire (et encore plus affreux) que pour les séries géométriques dérivées permet de prouver que les séries géométriques dérivées secondes de raison strictement inférieure à 1 convergent vers $\dfrac{2}{(1-q)^3}$. Ici, avec une raison $\dfrac{1}{2}$, notre somme converge en croissant vers $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \dfrac{1}{4}\times 4 = 2+1 = 3$. La minoration demandée par l'énoncé en découle.

   (b) C'est évident puisque la parenthèse tend vers 1, et la somme vers 2 (toujours notre série géométrique dérivée).

   (c) En ne supposant rien du tout, on divise par n l'encadrement précédent : $\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \frac{3}{n} \leq \frac{E(S_nT_n)}{n} \leq 1+\frac{2}{n}$, et on applique simplement le théorème des gendarmes (en appliquant le résultat de la question précédente pour le membre de gauche), et on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_nT_n)}{n} = 1$.

   (d) Puisque $E(S_nT_n) \sim n$ (question précédente), $\dfrac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)} \sim \dfrac{n}{\frac{n}{2}\times 2} \sim 1$. Autrement dit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)} = 1$. On se rapproche en fait d'une situation où les deux variables sont indépendantes.