Feuilles d'exercices n^o 21 : Couples de variables aléatoires

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2020

Exercice 1 (*)

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple (U, V). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (**)

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (**)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules elles-mêmes numérotées de 1 à k. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables X et Y.

Exercice 4 (***)

On considère deux variables aléatoires X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $P((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer la loi de U.

Exercice 5 (***)

Une urne contient $n + 1$ boules numérotées 0 à n. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire X_k est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.

2. Montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit X_iX_j.
5. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p premiers tirages. Exprimer Z_p en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et la limite de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Trois urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_1, X_2 et X_3 les trois numéros obtenus. On note X le plus grand des numéros obtenus, Z le plus petit, et Y celui du milieu. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z) (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de X, de Y et de Z. On pourra commencer pour cet exercice par traiter le cas où $n = 3$.

Exercice 7 (**)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.

1. (a) Donner la loi du couple (X, Y).
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{2; 3; \dots; n+1\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{n+1; \dots; 2n\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que $P(X+Y = Z) = \dfrac{n-1}{2n^2}$.
3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\{1; 2; \dots; n\})$.
   (b) On admet que T est indépendante de X et de Y. Déterminer la probabilité $P(X+Y+Z = n + 1)$.

Problème (***)

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de n lancers d'une pièce équilibrée. On note S_n le nombre de Piles obtenus au cours des n lancers et T_n le rang d'apparition du premier Pile (si aucun Pile n'apparait lors des n lancers, on convient que $T_n = 0$).

1. Dans cette question $n = 3$.
   (a) Donner la loi du couple (S_3, T_3).
   (b) Donner la loi de T_3 et calculer son espérance.
   (c) Quelle est la loi de S_3 et quelle est son espérance ?
   (d) Les variables S_3 et T_3 sont-elles indépendantes ?
   (e) Calculer les probabilités suivantes :

i. $P(S_3 = T_3)$.

ii. $P_{T_3 \neq 0}(S_3 = T_3)$.

iii. $P_{S_3=2}(T_3 = 1)$.

(f) Donner la loi de la variable produit S_3T_3, calculer son espérance et en déduire le quotient $\dfrac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)}$.

2. Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général.

(a) Pour $k = 0$ puis pour tout entier k compris entre 1 et n, calculer la probabilité conditionnelle $P_{S_n=1}(T_n = k)$. Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible ?

(b) Préciser les valeurs prises par la variable T_n et donner sa loi.

(c) Déterminer la valeur de l'espérance de T_n en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$ (on a le droit d'utiliser des séries géométriques dérivées).

(d) Reconnaître la loi de S_n et préciser son espérance.
Justifier l'inégalité $S_nT_n \geq S_n$ et en déduire que $E(S_nT_n) \geq \dfrac{n}{2}$.

(e) Quand T_n prend la valeur k $(0 \leq k \leq n)$, quelles valeurs peut prendre S_n ?

(f) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ définie sur $[0, n+1]$. En distinguant les cas n pair et n impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable S_nT_n.
En déduire que $E(S_nT_n) \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

3. On cherche maintenant à obtenir un meilleur encadrement de $E(S_nT_n)$ permettant de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E(S_nT_n)}{n}$. On admet que $E(S_nT_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \times \frac{n-k+2}{2}$.

(a) Montrer que $\dfrac{n+2}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - 3 \leq E(S_nT_n) \leq n+2$ (on pourra utiliser un calcul de série géométrique dérivée seconde).

(b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2$.

(c) En supposant que la suite de terme général $\dfrac{E(S_nT_n)}{n}$ converge, déterminer sa limite.

(d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)}$. Interpréter ce résultat.