Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 novembre 2019

Vrai-Faux

1. Complètement faux, il faut un signe + à la place du moins, ou alors avoir l'inégalité dans l'autre sens.
2. Vrai (on peut rajouter un modulo 2π si on le souhaite, mais tant qu'on ne parle pas d'arguments principaux, c'est facultatif).
3. Faux, il y a une seule exception, le nombre 0 qui n'admet que lui-même comme racine carrée.
4. Vrai.
5. Faux, il faut avoir $a \in \mathbb{U}$ sinon il s'agit simplement d'une similitude (directe) et non d'une isométrie.

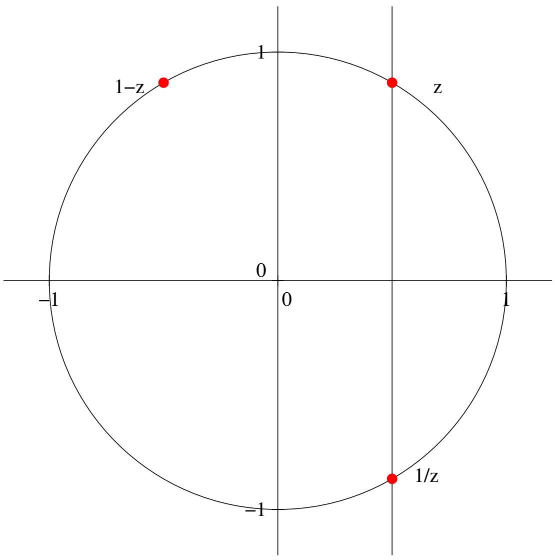
Exercice 1 (*)

- Directement en développant, $(1+2i)^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -2i - 11$. On ne risque pas de mettre ce nombre sous une forme exponentielle simple. Si on tient vraiment à essayer de le faire, autant mettre simplement $1+2i$ sous forme exponentielle : $|1+2i| = \sqrt{5}$, donc $1 + 2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right) = \sqrt{5}e^{i\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. On en déduit que $(1+2i)^3 = 5\sqrt{5}e^{3i\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.
- En mutipliant par le conjugué, $\frac{4}{1-i} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $\frac{(2+i)^2(1-i)}{4+i} = \frac{(3+4i)(1-i)(4-i)}{17} = \frac{(3+4i)(3-5i)}{17} = \frac{29-3i}{17}$. La encore, pas de forme exponentielle évidente. Si on tient à en donner une, mieux vaut utiliser un arcsin qu'un arccos puisque l'argument sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 (partie imaginaire négative, mais partie réelle positive).
- En additionnant 10π à l'argument, c'est-à-dire $\frac{40\pi}{4}$, $e^{-i\frac{37\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
- $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Ici, on a intérêt à mettre sous forme exponentielle : $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, donc $z_4 = \left(2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{11} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{11} = 2^{11}e^{-\frac{11\pi}{3}} = 2048\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1024 + 1024\sqrt{3}i$.
- Le boulot a déjà été mâché : $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16 - 16\sqrt{3}i$.
- Commençons par simplifier ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse : $\frac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i)(2+i)}{4+1} = \frac{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1+(4\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3})i}{5} = 1 + \sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc élevé à la puissance 17 on obtient $2^{17}e^{i\frac{17\pi}{3}} = 2^{17}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{16} - 2^{16}\sqrt{3}i = 65\ 536 - 65\ 536\sqrt{3}i$.

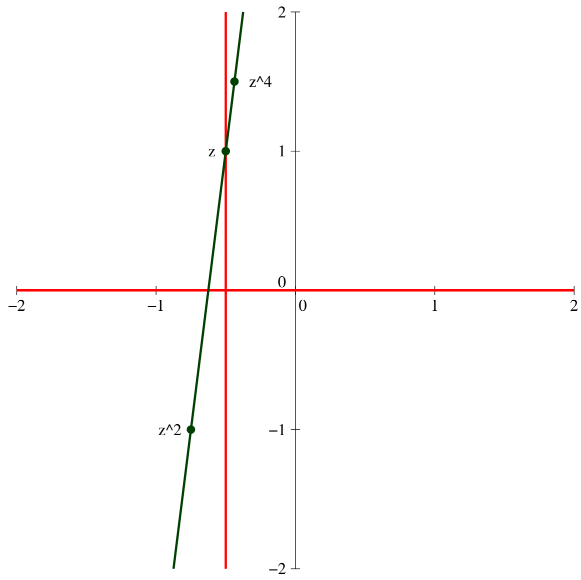
- Pas vraiment de souci avec une exponentielle quelconque : $e^{(1+i)\ln(3)} = e^{\ln(3)}e^{i\ln(3)} = 3e^{i\ln(3)} = 3\cos(\ln(3)) + 3i\sin(\ln(3))$.

Exercice 2 (**)

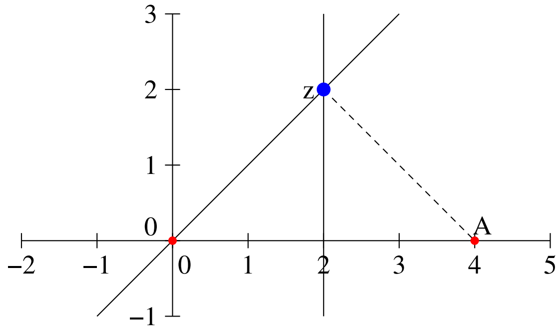
1. On a $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{U}$. De plus, si $|z| = |z-1|$, on obtient en élevant le tout au carré $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$, ce qui donne après simplification $z + \overline{z} = 1$, soit $\text{Re}\,(z) = \dfrac{1}{2}$. Les deux seuls points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $\dfrac{1}{2}$ sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, qui sont donc les deux solutions du problèmes posé.
   Une autre façon de résoudre la deuxième équation est l'interprétation géométrique : $|z| = |1-z|$ signifie que la distance entre le point M d'affixe z et l'origine O du repère est la même que la distance entre M et le point A d'affixe 1. Autrement dit, le point M se trouve sur la médiatrice du segment $[OA]$, qui est bien la droite d'équation $\text{Re}\,(z) = \dfrac{1}{2}$. Un schéma avec uniquement la solution $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$:



2. On peut traduire l'hypothèse par le fait que $\dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$ (si $z = 0$ ou $z = 1$, valeurs pour lesquelles le quotient n'est pas défini, les points seront de toute façon alignés puisque confondus). On a donc $\dfrac{z^2(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z(z+1) \in \mathbb{R}$. Posons $z = a + ib$, on a alors $z(z+1) = a^2 + a - b^2 + i(2ba + b)$. On obtient donc la condition $b(2a+1) = 0$, soit $b = 0$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$. L'ensemble recherché est donc la réunion de la droite réelle et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ (ou en terme de complexes l'ensemble des complexes réels ou de partie réelle égale à $-\dfrac{1}{2}$). Il est ici difficile de faire une résolution purement géométrique de ce problème. Une solution surlignée sur la figure ci-dessous, correspondant à $z = -\dfrac{1}{2} + i$.

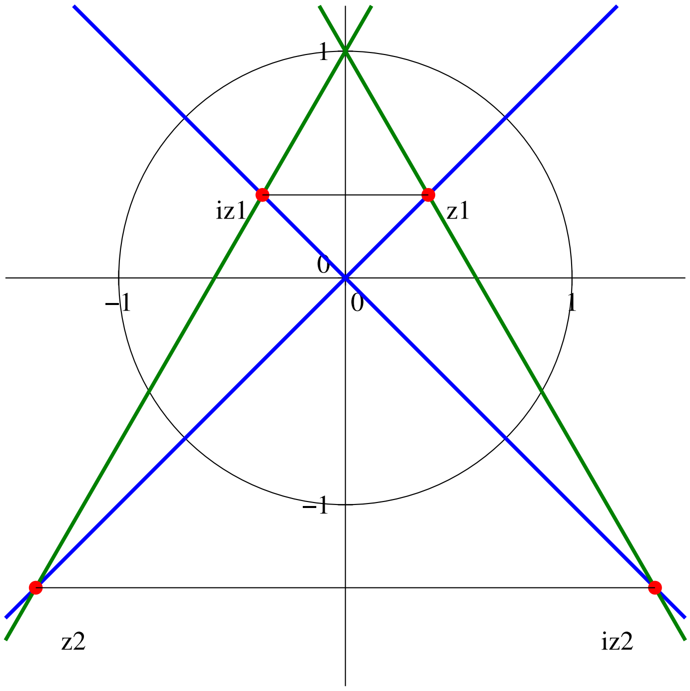


3. On peut s'en sortir uniquement par le calcul : si $|z| = |z-4|$, en élevant au carré, on obtient $z\overline{z} = (z-4)(\overline{z}-4) = z\overline{z} - 4(z+\overline{z}) + 16$, donc $16 = 4(z+\overline{z}) = 8\text{Re } z$, et $\text{Re } z = 2$. Ensuite, en supposant $z \neq 0$, $\arg z = \arg(z+1+i) \Leftrightarrow \arg \dfrac{z+1+i}{z} = 0$, donc $\dfrac{z+1+i}{z} = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit $z+1+i = \lambda z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{\lambda - 1}$. Le seul multiple réel de $1+i$ ayant pour partie réelle 2 étant $2(1+i) = 2+2i$ (qui correspond à $\lambda = \dfrac{3}{2}$), la seule valeur de z convenable est donc $2+2i$.
Il est également possible de raisonner géométriquement. Notons M l'image de z dans le plan complexe, et A celle de 4, alors la condition $|z| = |z-4|$ peut s'écrire sous la forme $|z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow AM = OM$. Le point M doit donc appartenir à la médiatrice du segment $[OM]$, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 2$ dans le plan. De plus deux nombres complexes ont même argument si leurs images sont situées sur une même demi-droite d'origine 0. Ici, l'image de $z+1+i$ étant l'image de M par la translation de vecteur d'affixe $1+i$, il ne peut être aligné avec O et M que si le vecteur d'affixe $1+i$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$, donc M se situe sur la droite passant par le point d'affixe $1+i$. Cette droite intersecte celle d'équation $x = 2$ en un seul point, d'affixe $2+2i$, qui est donc l'unique solution du problème posé.



4. Les trois points forment un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Dans le premier cas, on obtient $z - i = ize^{i\frac{\pi}{3}} - ie^{i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} \times (-2i\sin\frac{\pi}{6})}{e^{i\frac{5\pi}{12}} \times (-2i\sin\frac{5\pi}{12})} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}$ et dans le deuxième $z - i = ize^{-i\frac{\pi}{3}} - ie^{-i\frac{\pi}{3}}$, soit $z =$

$i\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 2i\sin\frac{\pi}{6}}{e^{i\frac{\pi}{12}}\times(-2i\sin\frac{\pi}{12})} = -\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{\pi}{12}}$. Un petit dessin pour voir où tout ça se situe :



On peut en fait résoudre ce problème très géométriquement, je vous ai mis la figure d'abord pour que vous puissiez mieux suivre. Quel que soit le nombre complexe z, le triangle formé par les images de 0, z et iz est isocèle rectangle en 0 (en effet, iz a même module que z, et un argument augmenté de $\dfrac{\pi}{2}$). Il s'agit donc de coller ensemble un triangle isocèle rectangle et un équilatéral ayant un côté commun avec l'hypothénuse du rectangle isocèle. Dans cette construction, la médiatrice du segment reliant z et iz est donc commune avec la droite remarquable issue de i dans le triangle équilatéral. Comme cette médiatrice passe par 0, elle doit donc être confondue avec l'axe imaginaire. Cela implique que z se situe sur une des deux bissectrices des deux Axes (en bleu sur le dessin). De plus, l'angle formé par la droite reliant i et z devra être égal à $\pm\dfrac{\pi}{6}$ (l'axe imaginaire étant bissectrice d'un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ dans le triangle équilatéral). Les deux droites correspondantes sont en vert sur la figure, il ne reste plus qu'à prendre les points d'intersection des droites bleues et vertes pour obtenir les points correspondant à z et iz. On peut ensuite faire des calculs trigonométriques savants pour retrouver les affixes exactes de ces points.

Exercice 3 (* à ***)

1. Cette équation à coefficients réels se résout comme vous aviez l'habitude de le faire en Terminale : $\Delta = 4-20 = -16 = (4i)^2$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$, et $z_2 = 1+2i$.
2. On applique la méthode générale vue en cours : $\Delta = (2-3i)^2 - 4i(5i-5) = 4-9-12i+20+20i = 15+8i$. On cherche à déterminer les racines carrées du discriminant, posons $\delta = a+ib$, la condition $\delta^2 = \Delta$ donne en isolant partie réelle et imaginaire les équations $a^2-b^2 = 15$ et $2ab = 8$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2+8^2} =$

$\sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$. En combinant la première et la troisième équation, on a donc $2a^2 = 15+17 = 32$, donc $a = \pm 4$, et $2b^2 = 17-15 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme a et b sont de même signe à cause de l'équation $2ab = 8$, on peut choisir $\delta = 4+i$ ou $\delta = -4-i$. On obtient alors pour l'équation initiale les deux solutions $z_1 = \dfrac{-2+3i+4+i}{2i} = \dfrac{2+4i}{2i} = 2-i$, et $z_2 = \dfrac{-2+3i-4-i}{2i} = \dfrac{-6+2i}{2i} = 1+3i$.

3. Cette fois-ci, le discriminant vaut $\Delta = i^2 - 8(1-i) = 8i - 9$. En recherchant un $\delta = a+ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$, on obtient les équations $a^2 - b^2 = -9$ et $2ab = 8$. De plus, la condition sur le module revient à dire que $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$ (non, ça ne se simplifie pas). Tout cela nous donne $2a^2 = \sqrt{145} - 9$ et $2b^2 = \sqrt{145} + 9$. Comme a et b doivent par ailleurs être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{145}-9}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{145}+9}{2}}$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{-i+\delta}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-i-\delta}{4}$, tenter de les écrire entièrement n'a aucun intérêt, on ne simplifiera rien de toute façon.

4. En multipliant par z^2, on obtient $z^4 = -|z|^4$. Un nombre complexe est égal à l'opposé de son module si et seulement si il est réel négatif, donc $z^4 \in \mathbb{R}^-$, ou encore $\arg(z^4) \equiv \pi[2\pi]$, d'où $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. L'ensemble des solutions est la réunion des deux bissectrices des axes dans le plan complexe.

   On peut également résoudre plus brutalement en posant $z = a+ib$, on obtient alors $(a+ib)^2 = -(a-ib)^2$, soit $a^2 - b^2 + 2iab = -(a^2 - b^2 - 2iab)$, soit $2(a^2 - b^2) = 0$. On retrouve les deux possibilités $a = b$ et $a = -b$ qui correspondent aux deux bissectrices.

   Dernière méthode revenant au même calcul que la première : on constate que 0 est solution évidente au problème, et on écrit z sous forme exponentielle. On trouve $r^2e^{2i\theta} = -r^2e^{-2i\theta} = r^2e^{-2i\theta+\pi}$. L'égalité des modules est toujours vérifiée, celle des arguments donne la condition $2\theta \equiv -2\theta + \pi[2\pi]$, soit $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. On retrouve encore une fois les deux bissectrices des axes.

5. Deux méthodes : on pose $Z = z^2$ puis on résout l'équation de degré 2, dont le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2$, et on obtient les solutions $Z_1 = \dfrac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$, et $Z_2 = e^{-i\theta}$. On peut aussi remarquee que l'équation s'écrit $z^4 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^2 + e^{i\theta}e^{-i\theta} = 0$, équation de type « somme-produit », et on en déduit que $Z_1 = e^{i\theta}$ ou $Z_2 = e^{-i\theta}$. Dans les deux cas, les valeurs possibles pour z sont les racines carrées de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$, c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\theta}{2}}, -e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{-i\frac{\theta}{2}}, -e^{-i\frac{\theta}{2}}\}$. Notons tout de même des cas particulier où il n'y a en fait pas quatre solutions disctinctes. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on n'a que les deux solutions 1 et -1, ce qui est logique puisque dans ce cas l'équation peut se factoriser sous la forme $(z^2-1)^2 = 0$. Autre cas particulier, $\theta \equiv \pi[2\pi]$, ou on a pour seules solutions i et $-i$, puisque dans ce cas on a la factorisation $(z^2+1)^2 = 0$.

6. On peut ruser en remarquant que $-5|z^2| + 2$ est un réel, donc z^2 soit être réel. Celà ne se produit que si $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$. Dans le premier cas, il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x^2 + 2 = 0$, soit $x^2 = 1$, donc $x = \pm 1$. Dans le deuxième cas, $z = ib$, avec $-3b^2 - 5b^2 + 2 = 0$, soit $b^2 = \dfrac{1}{4}$, donc $z = \pm\dfrac{i}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$.

   Encore une fois, on s'en sort très bien de façon purement algébrique, en posant $z = a+ib$: $3(a^2 - b^2 + 2iab) - 5(a^2 + b^2) + 2 = 0$ devient $-2a^2 - 8b^2 + 2 + 6iab = 0$. L'annulation de la partie imaginaire donne immédiatement $ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$. On retrouve les deux cas étudiés ci-dessus, et bien sûr les deux mêmes équations et les mêmes solutions.

7. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes d'un nombre complexe, ce pour quoi on sait qu'on peut procéder de manière algébrique ou trigonométrique. Même si je vous ai plutôt conseillé en cours de faire de façon trigonométrique en général, on obtient ici des valeurs exactes par la calcul algébrique (et rien de bon par la méthode trigonométrique, faute de connaitre un angle

remarquable ayant pour cosinus $-\dfrac{7}{25}$). Commençons par calculer les racines carrées de $24i-7$: soit $Z=a+ib$ vérifiant $Z^2=24i-7$, on aura les deux équations $a^2-b^2=-7$ et $2ab=24$, plus la condition sur le module $|Z^2|=a^2+b^2=|24i-7|=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$. On en déduit que $2a^2=25-7=18$ et $2b^2=25+7=32$, donc $a=\pm 3$ et $b=\pm 4$. Comme de plus a et b sont de même signe, on trouve les deux racines $Z_1=3+4i$ et $Z_2=-3-4i$. Restent à calculer les racines carrées de ces deux complexes, par la même méthode. Elle ont chacune pour module 5, dont en posant $z=a+ib$, on obtient dans le premier cas $2a^2=5+3=8$ et $2b^2=5-3=2$, et dans le deuxième cas $2a^2=2$ et $2b^2=8$. Comme a et b sont de même signe dans le premier cas et de signe contraire dans le deuxième, on obtient quatre racines : $\mathcal{S}=\{2+i,-2-i,1-2i,-1+2i\}$.

8. En multipliant les deux membres de l'équation par z (remarquons au passage que 0 est une solution qu'il faudra penser à rajouter si elle n'apparait pas dans nos calculs), on obtient $|z|^2=z^{n+1}$. En particulier, z^{n+1} est un nombre réel positif, ce qui implique $\arg z^{n+1}\equiv 0[2\pi]$, donc $\arg z\equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{n+1}\right]$. De plus, en prenant le module de cette même équation, on a $|z|^2=|z|^{n+1}$, ce qui ne peut se produire que si $z=1$, sauf dans le cas où $n=1$, où l'égalité de modules est toujours vérifiée. Dans ce dernier cas, l'équation se réduit en fait à $z=\overline{z}$, dont les solutions sont tous les réels. Si $n>1$, la combinaisons des deux informations obtenues nous montre que les solutions sont les racines $n+1$-èmes de l'unité, auxquelles on ajoute 0. Je souhaite pour conclure bon courage à ceux qui tenteront de se lancer dans un calcul bourrin en posant $z=a+ib$.

9. Cherchons donc la racine réelle en posant $z=x\in\mathbb{R}$. On doit avoir $4ix^3+2x^2+6ix^2-5x-4ix+3-21i=0$. En particulier, la partie réelle du membre de gauche étant nulle, on a $2x^2-5x+3=0$, équation qui a pour solution évidente 1, et pour deuxième solution $\dfrac{3}{2}$ (en effet, le produit des deux solutions vaut $\dfrac{3}{2}$). Si $x=1$, la partie imaginaire du membre de gauche de l'équation vaut -15, donc 1 n'est pas solution. Par contre, si $x=\dfrac{3}{2}$, elle vaut $4\times\dfrac{27}{8}+6\times\dfrac{9}{4}-4\times\dfrac{3}{2}-21=0$, donc il s'agit bien d'une racine de l'équation. On peut donc factoriser cette équation sous la forme $\left(z-\dfrac{3}{2}\right)(az^2+bz+c)=az^3+\left(b-\dfrac{3}{2}a\right)z^2+\left(c-\dfrac{3}{2}b\right)z-\dfrac{3}{2}c$ (les coefficients a, b et c étant ici des nombres complexes ; on peut tout à fait effectuer une division euclidienne dans ce cas également). Par identification des coefficients, on obtient $a=4i$, $b-\dfrac{3}{2}a=2+6i$, soit $b=2+12i$, et $c-\dfrac{3}{2}b=-5-4i$, soit $c=-2+14i$ (et on vérifie que la dernière équation $-\dfrac{3}{2}c=3-21i$ est bien vérifiée car une erreur de calcul est vite faite avec les nombres complexes). On s'est donc ramenés à l'équation $\left(z-\dfrac{3}{2}\right)\big(4iz^2+(2+12i)z-2+14i\big)=0$. Reste à trouver les racines de la parenthèse, on peut tout diviser par 2 pour obtenir un discriminant $\Delta=(1+6i)^2-8i(-1+7i)=1-36+12i+8i+56=21+20i$. Pour calculer une racine carrée de Δ, on pose $\delta=a+ib$, si $\delta^2=\Delta$ implique $a^2-b^2=21$, $2ab=20$, et via la calcul du module $a^2+b^2=|\Delta|=\sqrt{21^2+20^2}=\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29$. On en déduit $2a^2=50$ et $2b^2=8$, soit $a^2=25$ et $b^2=4$. Comme a et b sont de même signe, on peut choisir $\delta=5+2i$ ou $\delta=-5-2i$. Enfin, les deux dernières solutions de notre équation sont $z_1=\dfrac{-1-6i-5-2i}{4i}=-2+\dfrac{3}{2}i$ et $z_2=\dfrac{-1-6i+5+2i}{4i}=-1-i$. En conclusion, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{2};-1-i;-2+\dfrac{3}{2}i\right\}$.

10. Pour cette dernière je ne résiste pas à tricher un peu en remarquant que $(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=z^5-z^4+z^3-z^2+z+z^4-z^3+z^2-z+1=z^5+1$, donc les solutions de l'équation vérifient $z^5=-1$, soit $(-z)^5=1$, et sont donc les opposés des racines cinquièmes

de l'unité, auxquels il faut enlever -1 qui n'était pas solution de l'équation initiale (on l'a rajoutée en multipliant par $z+1$, qui s'annule lorsque $z=-1$). On a donc pour solutions $-e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i(\frac{2\pi}{5}+\pi)} = e^{i\frac{7\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{9\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et enfin $-e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.
Une méthode moins astucieuse est disponible mais tout de même assez brutale, et vous aurez du mal à y penser tous seuls. Commençons par constater que 0 n'est pas solution de l'équation, et divisons-là par z^2, ce qui donne $z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$. On peut alors avoir l'idée de faire le changement de variable $Z = z + \frac{1}{z}$. On aurait alors $Z^2 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$. On remarque alors que notre équation s'écrit $Z^2 - 1 - Z = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1+4 = 5$, et qui admet donc deux racines $Z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il reste à retrouver les valeurs de z correspondantes, ce qui nécessite encore du calcul. Par exemple, si $Z = Z_1$, on doit résoudre l'équation $z+\frac{1}{z} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit en multipliant par z, $z^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$. Cette nouvelle équation du second degré a pour discriminant $\Delta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{\sqrt{5}-5}{2} < 0$. il y a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, et $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. De même, l'équation $z + \frac{1}{z} = Z_2$ a pour discriminant $\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 4 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$, ce qui amène aux deux autres solutions $z_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $z_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.
En comparant avec les solutions obtenues par la méthode astucieuse plus haut, on peut en déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des multiples impairs de $\frac{\pi}{5}$. Il n'est pas très compliqué de se convaincre que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

Exercice 4 (**)

1. On peut en effet tout développer peu subtilement : $z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10^2 + 5z - 1$. Miracle, ça se simplifie avantageusement pour donner (une fois tout divisé par 2) $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$. On pose $Z = z^2$, et on a $5Z^2 + 10Z + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 100 - 20 = 80$, donc les solutions en sont $Z_1 = \frac{-10+\sqrt{80}}{10} = -1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $Z_2 = -1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Il ne reste qu'à prendre les racines carrées de ces deux nombres, qui sont des réels négatifs, pour obtenir les solutions de l'équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{ i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}; i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} \right\}$.
2. La méthode la plus simple est certainement de constater que 1 n'est pas racine, on peut donc faire le quotient et obtenir $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$, donc $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine cinquième de l'unité. On détermine ensuite facilement les valeurs de z correspondantes : si $\frac{z+1}{z-1} = a$, on a $z+1 = az - a$, donc $z(a-1) = a+1$, soit $z = \frac{a+1}{a-1}$. On remarque que 1 ne donne pas de solution, il n'y a donc que quatre valeurs possibles pour z (c'est normal, l'équation initiale

est en fait de degré 4) : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1} ; \dfrac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}-1} ; \dfrac{e^{i\frac{6\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{6\pi}{5}}-1} ; \dfrac{e^{i\frac{8\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{8\pi}{5}}-1} \right\}$.

3. Les solutions obtenues par les deux méthodes sont évidemment identiques, pourtant on ne les a pas sous la même forme, et il n'est même pas immédiat de savoir quelle racine du premier ensemble correspond à quelle racine du deuxième. Pour cela, simplifions les expressions obtenues par la deuxième méthode en factorisant par l'angle moitié : $\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{-i\frac{\pi}{5}})}{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}}-e^{-i\frac{\pi}{5}})} = \dfrac{2\cos(\frac{\pi}{5})}{2i\sin(\frac{\pi}{5})} = -\dfrac{i}{\tan(\frac{\pi}{5})}$. On obtient de même pour les trois autres solutions $-\dfrac{i}{\tan(\frac{2\pi}{5})}$, $-\dfrac{i}{\tan(\frac{3\pi}{5})}$ et $-\dfrac{i}{\tan(\frac{4\pi}{5})}$. Sachant que la tangente est croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et que les valeurs de $\tan\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ sont négatives, on peut effectuer l'identification suivante : $\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{3\pi}{5})} = -\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$, et enfin $\dfrac{1}{\tan(\frac{4\pi}{5})} = -\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$. En particulier, on aura $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{5-2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = 1+\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{(5-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{100-20}} = \sqrt{\dfrac{30-10\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$. De façon tout à fait similaire, $\tan^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{5+2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{4\pi}{5})} = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = -\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 5 (**)

C'est plus un exercice d'arithmétique qu'un exercice sur les nombres complexes. Commençons par remarquer que, si z est une racine n-ème de l'unité, alors z est aussi une racine k-ème de l'unité pour tous les entiers k multiples de n. En effet, si $k = a \times n$, où a est un nombre entier, et $z^n = 1$, alors $z^k = (z^n)^a = 1^a = 1$. Pour revenir à notre problème, si on note r le pgcd de p et de q, toutes les racines r-èmes de l'unité sont donc à la fois racines p-èmes et q-èmes, donc $\mathbb{U}_r \subset \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$.

La réciproque utilise le théorème de Bezout. Si on a simultanément $z \in \mathbb{U}_p$ et $z \in \mathbb{U}_q$, on a $z^p = z^q = 1$ donc pour tous entiers n et m, on a $z^{np-mq} = \dfrac{z^{np}}{z^{mq}} = 1$. Or, il existe un couple d'entiers tels que $np - mq$ soit égal à r, donc $z^r = 1$. Pour montrer Bezout, on peut passer par l'algorithme d'Euclide : à chaque étape, le nouveau reste obtenu est une combinaison à coefficients entiers des deux restes précédents (il n'y a qu'à écrire la division euclidienne), donc par récurrence facile de p et de q. Comme le dernier reste est égal à r, celui-ci est bien une combinaison à coefficients entiers de p et q.

Conclusion : $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q = \mathbb{U}_{pgcd(p,q)}$.

Exercice 6 (*)

Pour la première, qui est un grand classique, Euler est votre ami :

$$\begin{array}{rcl}\cos^6(x) & = & \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 \\ & = & \dfrac{e^{6ix}+6e^{5ix}e^{-ix}+15e^{4ix}e^{-2ix}+20e^{3ix}e^{-3ix}15e^{2ix}e^{-4ix}+6e^{ix}e^{-5ix}+e^{-6ix}}{64} \\ & = & \dfrac{2\cos(6x)+12\cos(4x)+30\cos(2x)+20}{64} \\ & = & \dfrac{1}{32}\cos(6x)+\dfrac{3}{16}\cos(4x)+\dfrac{15}{32}\cos(2x)+\dfrac{5}{16}\end{array}$$

Pour la deuxième, $\sin^2(x)\cos^3(x)=(1-\cos^2(x))\cos^3(x)=\cos^3(x)-\cos^5(x)$. Or, par la même méthode que ci-dessus, $\cos^5(x)=\dfrac{1}{16}(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x))$ et $\cos^3(x)=\dfrac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$, donc $\sin^2(x)\cos^3(x)=-\dfrac{1}{16}\cos(5x)-\dfrac{1}{16}\cos(3x)+\dfrac{1}{8}\cos(x)$.

Enfin pour la dernière linéarisation,

$$\begin{array}{rcl}\cos(x)\sin^5(x) & = & \cos(x)\sin(x)\sin^4(x) \\ & = & \dfrac{1}{2}\sin(2x)\sin^4(x) \\ & = & \dfrac{1}{32}\left(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)(e^{ix}-e^{-ix})^4 \\ & = & \dfrac{1}{32}\dfrac{(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})}{2i} \\ & = & \dfrac{1}{32}\dfrac{e^{6ix}-4e^{4ix}+6e^{2ix}-4+e^{-2ix}-e^{2ix}+4-6e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i} \\ & = & \dfrac{1}{32}\dfrac{e^{6ix}-4e^{4ix}+5e^{2ix}-5e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i} \\ & = & \dfrac{1}{32}(\sin(6x)-4\sin(4x)+5\sin(2x))\end{array}$$

On commence par écrire $\cos(5x)=\mathrm{Re}\,(e^{i5x})=\mathrm{Re}\,(e^{ix})^5=\mathrm{Re}\,(\cos(x)+i\sin(x))^5=\mathrm{Re}\,(\cos^5(x)+5\cos^4(x)(i\sin(x))+10\cos^3(x)(i\sin(x))^2+10\cos^2(x)(i\sin(x))^3+5\cos(x)(i\sin(x))^4+(i\sin(x))^5)$. On ne garde que les termes réels de la somme pour obtenir

$$\begin{array}{rcl}\cos(5x) & = & \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x) \\ & = & \cos^5(x)-10\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2 \\ & = & \cos^5(x)-10\cos^3(x)+10\cos^5(x)+5\cos(x)-10\cos^3(x)+5\cos^5(x) \\ & = & 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)\end{array}$$

De l'autre côté, $\sin^2(3x)=1-\cos^2(3x)=1-(4\cos^3(x)-3\cos(x))^2=1-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)$. Un peu de courage pour la dernière étape :

$$\begin{array}{rcl}\cos(5x)\sin^2(3x) & = & (16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x))(-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)+1) \\ & = & -256\cos^{11}(x)+384\cos^9(x)-144\cos^7(x)+16\cos^5(x)+320\cos^9(x)-480\cos^7(x) \\ & & +180\cos^5(x)-20\cos^3(x)-80\cos^7(x)+120\cos^5(x)-45\cos^3(x)+5\cos(x) \\ & = & -256\cos^{11}(x)+704\cos^9(x)-704\cos^7(x)+316\cos^5(x)-65\cos^3(x)+5\cos(x)\end{array}.$$

Je me rends compte en relisant le corrigé que ce calcul peut faire un peu peur !

Attaquons-nous désormais au tout dernier calcul. On peut évidemment tricher en utilisant les formules de duplication, mais ça marche très bien comme ci-dessus :
$\sin(2x)=\mathrm{Im}\,(e^{ix})^2=\mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^2=\mathrm{Im}\,(\cos^2(x)+2i\cos(x)\sin(x)-\sin^2(x))=2\cos(x)\sin(x)$

On fait de même pour $\sin(4x)=\mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^4=4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)=4\sin(x)(\cos^3(x)-\cos(x)(1-\cos^2(x)))=4\sin(x)(2\cos^3(x)-\cos(x))=\sin(x)(8\cos^3(x)-4\cos(x))$.

On enchaine courageusement : $\sin(6x)=\mathrm{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^6=6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^3(x)+6\cos(x)\sin^5(x)=\sin(x)(6\cos^5(x)-20\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+6\cos(x)(1-\cos^2(x))^2)=\sin(x)(6\cos^5(x)-20\cos^3(x)+20\cos^5(x)+6\cos(x)-12\cos^3(x)+6\cos^5(x))=\sin(x)(32\cos^5(x)-32\cos^3(x)+6\cos(x))$.

Enfin, $\sin(8x) = \text{Im }(\cos(x) + i\sin(x))^8 = 8\cos^7(x)\sin(x) - 56\cos^5(x)\sin^3(x) + 56\cos^3(x)\sin^5(x) - 8\cos(x)\sin^7(x) = \sin(x)(8\cos^7(x) - 56\cos^5(x)(1-\cos^2(x)) + 56\cos^3(x)(1-\cos^2(x))^2 - 8\cos(x)(1-\cos^2(x))^3) = \sin(x)(8\cos^7(x) - 56\cos^5(x) + 56\cos^7(x) + 56\cos^3(x) - 112\cos^5(x) + 56\cos^7(x) - 8\cos(x) + 24\cos^3(x) - 24\cos^5(x) + 8\cos^7(x)) = \sin(x)(128\cos^7(x) - 192\cos^5(x) + 80\cos^3(x) - 8\cos(x))$.

Il ne reste plus qu'à brillamment additionner tout ça pour obtenir
$\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = \sin(x)(128\cos^7(x) - 160\cos^5(x) + 56\cos^3(x) - 4\cos(x))$.

Exercice 7 (***)

La première somme utilise une reconnaissance de binome de Newton, donc pas vraiment faisable pour vous pour l'instant (il faut que je me décide à virer ce calcul de cette feuille d'exercices) :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \text{Re }\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} = \text{Re }(1+e^{ix})^n = \text{Re }(e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}))^n = \text{Re }\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$

La deuxième est tout à fait classique, avec reconnaissance d'une somme géométrique :
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)} = \text{Im }\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} = \text{Im }\frac{1-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos(x)}} = \text{Im }\frac{\cos(x)-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)}}{\cos(x)-\cos(x)-i\sin(x)}$$
$$= \text{Im }i\frac{\frac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)}}{\sin(x)} = \frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)}$$

Enfin, la dernière demande un peu plus d'astuce :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})-i\sin(\frac{k\pi}{n})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}1+\frac{i}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$. Or, en utilisant la relation $\tan(\pi - x) = \tan x$, tous les les termes de la deuxième partie de la somme s'annulent deux à deux (par exemple, le premier est l'opposé du dernier) donc il ne reste que $\dfrac{n-1}{2}$, qui est la valeur de la somme demandée.

Exercice 8 (* à **)

1. En effet, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = |u|^2 + u\overline{v} + v\overline{u} + |v|^2 + |u|^2 - u\overline{v} - v\overline{u} + |v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
2. Puisque u et v sont de module 1, on peut poser $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{i\theta'}$. On a alors $\dfrac{u+v}{1+uv} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\times 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}$, qui est bien un nombre réel.
3. Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$. Cherchons les valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lesquelles $|1+z| \geqslant 1$. Par un calcul classique, $|1+z| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|$. Or, $\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right][\pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right][2\pi]$. Vérifions que pour les valeurs restantes de θ, $|1+z^2| \geqslant 1$. En effet, on a alors $\theta \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right][2\pi]$, donc $2\theta \in \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right][4\pi]$, c'est-àdire que $2\theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right][4\pi]$ donc $|1+z^2| \geqslant 1$ d'après le calcul précédent, puisque $z^2 = e^{2i\theta}$. Les seuls cas pour lesquels les deux inégalités sont vérifiées sont $z_1 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 9 (* à **)

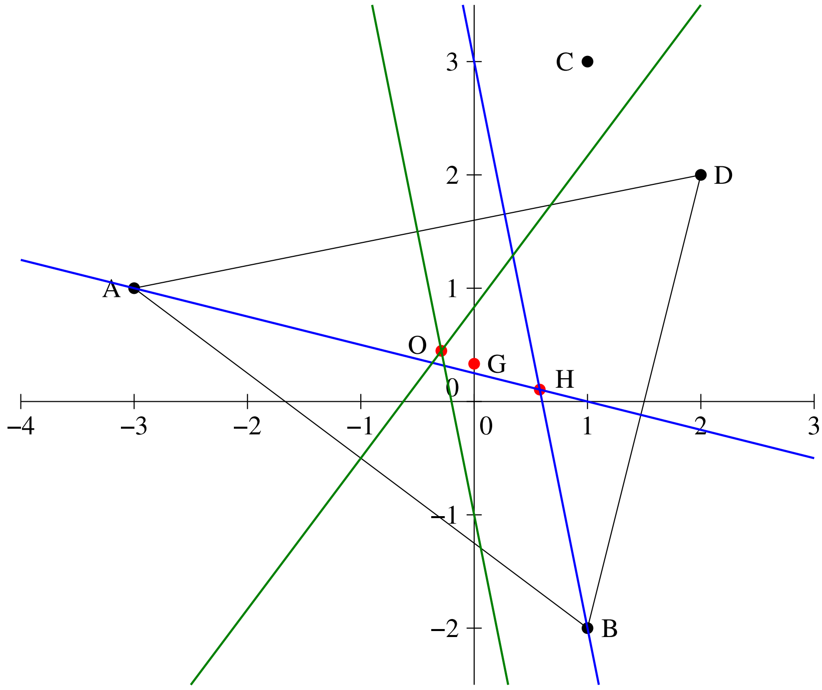
- C'est le cas le plus classique de définition d'un cercle qui donne pour équation complexe $|z-2+i|=3$. En élevant au carré et en développant, on obtient $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=9$, soit $z\overline{z}-(2+i)z+(i-2)\overline{z}+5=9$, donc une équation développée de la forme $z\overline{z}-(2+i)z+(i-2)\overline{z}-4=0$. Passons à l'équation cartésienne : en posant $z=x+iy$ dans la dernière équation, $x^2+y^2-(2+i)(x+iy)+(i-2)(x-iy)-4=0$, donc $x^2+y^2-2x-2iy-ix+y+ix+y-2x+2iy-4=0$. Tous les termes imaginaires s'annulent (ce sera toujours le cas) pour donner $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Si on factorise cette équation développée en faisant apparaitre des formes canoniques, cela donne $(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-4=0$, soit $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. On retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $A(2;-1)$ et de rayon $\sqrt{9}=3$.
- Pour changer un peu, utilisons la caractérisation d'un cercle donné par un de ses diamètres : un point M appartient au cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. En termes de nombres complexes, on a donc l'équation $(\overline{z_M-z_A})(z_M-z_B)\in i\mathbb{R}$, soit, en posant $z=x+iy$, $(x-iy+1+2i)(x+iy-3-4i)\in i\mathbb{R}$. En isolant la partie réelle qui doit être nulle, on tombe sur $x^2-3x+y^2-4y+x-3-2y+8=0$, soit $x^2+y^2-2x-6y+5=0$. On reconnait l'équation cartésienne développées d'un cercle. Factorisons-là : $(x-1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0$, soit $(x-1)^2+(y-3)^2=5$. On reconnait un cercle de centre $A(1+3i)$ (qui est bien le milieu du segment $[AB]$) et de rayon $\sqrt{5}$. L'équation complexe sera donc $|z-1-3i|=\sqrt{5}$, soit en développant $(z-1-3i)(\overline{z}-1+3i)=5$, ou encore $z\overline{z}+(3i-1)z-(1+3i)\overline{z}+5=0$.
- On peut factoriser cette équation sous la forme $(z-i)(\overline{z}+i)-1-3=0$, soit $|z-i|^2=4$ et donc $|z-i|=2$. On reconnait un cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2. Alternativement, on écrit $z=x+iy$ et on remplace dans l'équation initiale : $(x+iy)(x-iy)+i(x+iy)-i(x-iy)-3=0$ donne $x^2+y^2-2y-3=0$. On peut factoriser cette équation cartésienne à l'aide des formes canoniques : $x^2+(y-1)^2-1-3=0$, soit $x^2+(y-1)^2=4$. On retrouve évidemment le même centre et le même rayon pour le cercle.
- Factorisons cette équation : $(x-1)^2-1+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+9=0$, soit $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{23}{4}$. Ce cercle ayant le mauvais goût d'être inexistant, on peut donner n'importe quelle équation complexe, mais par souci de cohérence, on va prendre $\left|z-1-\dfrac{3}{2}i\right|=-\dfrac{23}{4}$. Par contre, on ne peut pas donner aisément d'équation complexe développée, puisque si on élève au carré comme on a l'habitude, on va tomber sur l'équation du cercle de centre $A\left(1+\dfrac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{23}{4}$, qui lui n'est pas vide du tout.
- On cherche en fait une équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Au vu des coordonnées des points A et B, le centre se trouvera sur l'axi imaginaire pur, qui est la médiatrice de $[AB]$. On recherche donc un point $O(ki)$ vérifiant $|z_O-z_B|=|z_O-z_C|$, soit en élevant au carré $|ki+1+i|^2=|ki-5i|^2$. À gauche, celà vaut $1+(k+1)^2=k^2+2k+2$, à droite on a $(k-5)^2=k^2-10k+25$. La valeur k doit donc vérifier $k^2+2k+2=k^2-10k+25$, soit $12k=23$, donc $k=\dfrac{23}{12}$. Quant au rayon, il est donc égal à $5-k$ (la valeur de la distance CO, si vous vous amusez à essayer de recalculer par exemple k^2+2k+2, vous allez vous embêter inutilement), soit à $\dfrac{37}{12}$. On obtient donc la magnifique équation de cercle $\left|z-\dfrac{23}{12}i\right|=\dfrac{37}{12}$. Sous forme développée, $\left(z-\dfrac{23}{12}i\right)\left(\overline{z}+\dfrac{23}{12}i\right)=\dfrac{1\ 369}{144}$, soit $z\overline{z}+\dfrac{23}{12}iz-\dfrac{23}{12}i\overline{z}-\dfrac{840}{144}=0$. Ici, on passe rapidement à l'équation cartésienne en notant que $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}\ (z)$, ce qui donne $x^2+y^2-\dfrac{23}{6}y-\dfrac{105}{18}=0$. Refactoriser à l'aide de la forme canonique ramène à $x^2+\left(y-\dfrac{23}{12}\right)^2=\dfrac{1\ 369}{144}$.
- Un cercle tangent simultanément aux deux axes a un centre d'affixe $k+ki$ et un rayon $|k|$, où

$k \in \mathbb{R}$ (faites un dessin). Ici, on cherche donc une valeur de k pour laquelle $|6+7i-k-ki| = k$, soit $(6-k)^2+(7-k)^2 = k^2$, donc $36-12k+k^2+49-14k+k^2 = k^2$, donc $k^2-26k+85 = 0$. Cette magnifique équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 676 - 340 = 336$, et admet donc deux racines $k_1 = \dfrac{26+\sqrt{336}}{2} = 13+2\sqrt{21}$, et $k_2 = 13-2\sqrt{21}$. Donnons par exemple les équations du premier cercle (ce sera largement suffisant vu l'intérêt des calculs) : $|z-(13+2\sqrt{21})(1+i)| = 13+2\sqrt{21}$. En développant, $(z-(13+2\sqrt{21})(1+i))(\overline{z}-(13+2\sqrt{21})(1-i)) = 253+52\sqrt{21}$, soit $z\overline{z}+(13+2\sqrt{21})(i-1)z-(13+2\sqrt{21})(1+i)\overline{z}+253+52\sqrt{21} = 0$. Si on préfère une équation cartésienne, $(x-13-2\sqrt{21})^2+(y-13-2\sqrt{21})^2 = 253+52\sqrt{21}$, que nous ne développerons pas.

Exercice 10 (* à ***)

1. Du facile pour commencer : $\dfrac{z_B+z_C}{2} = 1+\dfrac{1}{2}i$.
2. Toujours facile : $z_{\overrightarrow{AB-2AC}} = z_B - z_A - 2(z_C - z_A) = 4-3i-2(4+2i) = -4-7i$
3. Une façon de décrire les points M appartenant à la droite (AC) est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent être colinéaires, autrement dit que $(\overline{z_M - z_A})(z_C - z_A) \in \mathbb{R}$. En écrivant z sous la forme $a+ib$, on a donc $(a-ib+3+i)(4+2i) \in \mathbb{R}$, soit $-4b+4+2a+6 = 0$, ou encore $a-2b = -5$. De même, M appartient à (BD) si $(\overline{z_M - z_B})(z_D - z_C) \in \mathbb{R}$, soit $(a-ib-1-2i)(1-i) \in \mathbb{R}$, soit encore $-a+1-b-2 = 0$, donc $-a-b = 1$. Il ne reste plus qu'un petit système à résoudre. En additionnant les deux équations, $-3b = -4$ soit $b = \dfrac{4}{3}$, et $a = 2b-5 = -\dfrac{7}{3}$. Le point d'intersection des deux droites a donc pour affixe $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{4}{3}i$.
4. La somme des coefficients du barycentre étant égale à 1, il suffit de calculer $z_B - 2z_C + 2z_D = 1-2i-2-6i+4+4i = 1-4i$.
5. Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{CD}(1-i)$. Comme il a pour norme $\sqrt{2}$, le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ est un vecteur directeur normé de (CD). Pour (AB), on a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4-3i)$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(3+4i)$. Ce vecteur ayant pour norme $\sqrt{9+16} = 5$, le vecteur $\overrightarrow{v}\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)$ est un vecteur normal normé à (AB).
6. Le cercle de diamètre $[AD]$ peut être décrit par la condition : $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont orthogonaux, soit $(z-z_A)(\overline{z-z_D}) \in i\mathbb{R}$, en notant z l'affixe d'un point M du cercle. En notant $z = a+ib$, on obtient alors la condition $(a+3+i(b-1))(a-2+i(2-b)) \in i\mathbb{R}$, soit $(a+3)(a-2)+(b-2)(b-1) = 0$. En développant, $a^2+b^2+a-3b-4 = 0$. Appartenir à la droite (BC) peut au contraire se traduire par la condition $(z-z_B)(\overline{z_C - z_B}) \in \mathbb{R}$, soit $(a-1+i(b+2)) \times (-5i) \in \mathbb{R}$, soit $-5(a-1) = 0$. Ce qui donne très simplement $a = 1$, équation qui ne devrait surprendre personne vu les affixes des points B et C. Reportons donc la condition $a = 1$ dans l'équation de cercle pour trouver les intersections : $1+b^2+1-3b-4 = 0$, soit $b^2-3b-2 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant 17, et pour racines $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$. Les deux points d'intersection de la droite et du cercle ont donc pour affixes $1+i\times\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $1+i\times\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.
7. Pour le centre de gravité, il suffit de calculer $\dfrac{1}{3}(z_A+z_B+z_D) = \dfrac{1}{3}(-3+i+1-2i+2+2i) = \dfrac{1}{3}i$. Le centre de gravité du triangle a pour affixe $\dfrac{1}{3}i$.
   Pour l'orthocentre, on cherche un point H d'affixe $a+ib$ tel que (AH) soit orthogonale à (BD) et (BH) à (AD). La première condition s'exprime de la façon suivante : $(\overline{z_H - z_A})(z_D - z_B) \in$

$i\mathbb{R}$, soit $(a - ib + 3 + i)(1 + 4i) \in i\mathbb{R}$, donc $a + 3 + 4b - 4 = 0$, donc $a + 4b = 1$. De même, la deuxième condition s'exprime par $(a - ib - 1 - 2i)(5 + i) \in i\mathbb{R}$, donc $5a - 5 + b + 2 = 0$, ce qui donne $5a + b = 3$. On résout le petit système, par exemple par substitution : $a = 1 - 4b$, donc $5 - 20b + b = 3$, soit $b = \frac{2}{19}$, puis $a = 1 - 4b = \frac{11}{19}$. L'orthocentre a donc pour affixe $\frac{11}{19} + \frac{2}{19}i$.
Le centre du cercle circonscrit (on va garder le plus dur pour la fin) Ω d'affixe $c + id$ se trouve à égale distance des trois points. La condition $\Omega A = \Omega B$ se traduit (en élevant au carré) par $|c + id + 3 - i|^2 = |c + id - 1 + 2i|^2$, soit $(c + 3)^2 + (d - 1)^2 = (c - 1)^2 + (d + 2)^2$, donc $c^2 + 6c + 9 + d^2 - 2d + 1 = c^2 - 2c + 1 + d^2 + 4d + 4$. On obtient finalement la simple équation $8c - 6d = -5$ (qui est une équation cartésienne de droite, en l'occurence de la médiatrice du segment $[AB]$; on peut retrouver cette équation en partant du milieu de ce segment et en écrivant une condition d'orthogonalité). De même, la condition $\Omega A = \Omega D$ s'exprime par $|c + id + 3 - i|^2, = |c + id - 2 - 2i|^2$, soit $c^2 + 6c + 9 + d^2 - 2d + 1 = c^2 - 4c + 4 + d^2 - 4d + 4$, donc $10c + 2d = -2$ (ou encore $5c + d = -1$). Encore un système à résoudre : $d = -1 - 5c$, donc $8c + 6 + 30c = -5$, ce qui donne $c = -\frac{11}{38}$, puis $d = \frac{17}{38}$. Le centre du cercle circonscrit a pour affixe $-\frac{11}{38} + \frac{17}{38}i$.
Terminons avec le centre $I(e + if)$ du cercle inscrit. Si vous connaissez le résultat qui dit que I est le barycentre des trois sommets du triangle affectés d'un poids égal à la longueur du côté opposé, c'est assez facile. Passer par les angles est franchement compliqué, mais on peut écrire une condition sur les arguments qui finit par donner une ignoble équation du second degré en e et f (ce qui est normal puisqu'un angle a deux bissectrices, l'une intérieure et l'autre extérieure) qu'il faut factoriser, et trier les solutions trouvées. Bref, du boulot pas très rigolo. On peut faire (un peu) plus simple. Normons le vecteur $\overrightarrow{AB}(4 - 3i)$, pour obtenir une affixe $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, et considérons le point B' tel que $\overrightarrow{AB'}$ a pour affixe $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, c'est-à-dire $B'\left(-\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i\right)$. Ce point B' est situé sur la droite AB, à une distance 1 de A. Effectuons la même opération sur la droite AD : $\| \overrightarrow{AD} \| = \sqrt{26}$, on obtient le point $D'\left(-3 + \frac{5}{\sqrt{26}} + i + \frac{1}{\sqrt{26}}i\right)$. Comme le triangle $AB'D'$ est isocèle en A avec les mêmes directions de côté issus de A que le triangle ABD, la bissectrice issue de A est confondue avec la médiatrice du segment $[B'D']$. Il faut un peu de courage pour en calculer une équation : $IB' = ID'$ donc $\left|e + if + \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i\right|^2 = \left|e + if + 3 - \frac{5}{\sqrt{26}} - i - \frac{1}{\sqrt{26}}i\right|^2$, soit $\left(e - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(f + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(e + 3 - \frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(f - 1 - \frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2$. Après simplification (si j'ose dire), il reste $e\left(\frac{10}{\sqrt{26}} - \frac{52}{5}\right) + f\left(\frac{2}{\sqrt{26}} + \frac{14}{5}\right) = 6 - \frac{28}{\sqrt{26}}$. C'est bien une équation de droite, quoique fort indigeste. On devrait évidemment faire la même chose pour (par exemple) la bissectrice de $\widehat{BAD}$. On connait déjà (au signe près) un vecteur directeur de $\overrightarrow{BA}$, on peut prendre le point $A'\left(\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i\right)$. De l'autre côté, on calcule $\| \overrightarrow{BD} \| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$, on obtient alors un point $D''\left(1 + \frac{1}{\sqrt{17}} - 2i + \frac{4}{\sqrt{17}}i\right)$. Je vous épargne la suite des calculs, complètement immondes à effectuer entièrement de façon exacte. On obtient finalement un centre du cercle inscrit dont les coordonnées sont à peu près : $I(0.158 + 0.578i)$. Sur le graphique, je n'ai pas placé les bissectrices pour ne pas surcharger, les hauteurs sont en bleu et les médiatrices en vert, on constate que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.



Exercice 11 (* à **)

Commençons par les équations, normalement c'est assez facile :

- $z' = z + 3 - 2i$
- $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$
- $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + 2i)$, soit $z' = iz - i - 2 + 1 - 2i = iz - 1 - 3i$
- On peut s'en sortir assez vite en remarquant que $f(z)$ est de la forme $z' = a\overline{z} + b$, et que par exemple $f(1) = i$ et $f(i) = 1$. On a donc $a + b = i$ et $-ai + b = 1$. En soustrayant les deux équations, $(1+i)a = i - 1$, donc $a = \dfrac{i-1}{1+i} = \dfrac{(i-1)(1-i)}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$. On en déduit que $b = 0$ et $z' = i\overline{z}$.
- C'est une rotation d'angle π, donc $z' - 3i = -(z - 3i)$, soit $z' = -z + 6i$.
- Encore du cours : $z' + 2 - i = \dfrac{1}{2}(z + 2 - i)$, soit $z' = \dfrac{1}{2}z - 1 + \dfrac{1}{2}i$.
- Allons-y pour la composée : $z' = \dfrac{1}{2}(-z + 6i) - 1 + \dfrac{1}{2}i = -\dfrac{1}{2}z - 1 + \dfrac{7}{2}i$.

Pour reconnaitre les transformations, ça peut être un peu plus compliqué :

- On a une composée de réflexion (par rapport à l'axe réel) et de translation (de vecteur d'affixe 3), ça ne se simplifie pas. Ce genre de composition ne peut se simplifier que si la translation est de vecteur orthogonal à l'axe de la réflexion (auquel cas la composée est simplement une réflexion).
- Équation de similitude directe, on cherche le point fixe : $z = (1-i)z + 2i - 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{2i-1}{i} = 2 + i$. Par ailleurs, $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A(2+i)$ et de rapport $\sqrt{2}$, et d'une rotation de même centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
- Composée d'une réflexion d'axe réel et d'homothétie de centre 0 et de rapport 2, rien à ajouter.

- Encore une similitude directe, cherchons le point fixe : $z = 3z - 4i + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{2-4i}{-2} = -1+2i$. Calculer le module et l'argument de 3 ne devrait pas poser trop de problème. L'application est donc l'homothétie de centre $A(-1+2i)$ et de rapport 3.
- Posons $g(z) = -iz + 2i - 1$, et cherchons le point fixe de cette isométrie : $z = \dfrac{2i-1}{1+i} = \dfrac{(2i-1)(1-i)}{2} = \dfrac{1+3i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$. Par ailleurs, on a évidemment $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Exercice 12 (**)

1. Du simple calcul : $f(1) = 3$; $f(2i-5) = -4 + 25 - 20i + 2i - 5 + 1 = 17 - 18i$; et $f(e^{i\frac{\pi}{4}}) = i + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i + 1 = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$.
2. Il faut résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 1 + i$, soit $z^2 + z - i = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4i$. Cherchon une valeur de $\delta = a + ib$ telle que $\delta^2 = \Delta$. L'égalité des parties réelle et imaginaire donne $a^2 - b^2 = 1$ et $2ab = 4$, et celle du module donne $a^2 + b^2 = \sqrt{17}$. On en déduit que $2a^2 = 1 + \sqrt{17}$ et $2b^2 = \sqrt{17} - 1$. Les nombres a et b devant être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Les antécédents de $1+i$ sont alors au nombre de deux, ce sont les nombres $z_1 = \dfrac{-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\delta}{2}$ (expliciter plus n'a absolument aucun intérêt).
3. Il suffit de résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z^2 = -1$. Il y a donc deux points invariants, i et $-i$.
4. En notant $z = a + ib$, on a $f(z) = a^2 - b^2 + 2iab + a + ib + 1$. Cette image a une partie imaginaire nulle si $2ab + b = 0$, soit $b(2a+1) = 0$. On doit donc avoir soit $b = 0$ (c'est-à-dire que z est en fait un nombre réel, ces solutions n'ont rien de surprenant puisque les nombres réels ont de façon évidente une image réelle par f), soit $a = -\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond aux nombres complexes de partie imaginaire $-\dfrac{1}{2}$.
5. Cette condition peut se traduire par le fait que $(\overline{f(z)-1})(z-1) \in \mathbb{R}$, soit $(a^2 - b^2 - 2iab + a - ib)(a + ib - 1) \in \mathbb{R}$. La partie imaginaire de ce produit doit donc être nulle, ce qui se traduit par $a^2b - b^3 - 2a^2b + 2ab + ab - ab + b = 0$, soit $b(-b^2 - a^2 + 2a + 1) = 0$. La condition $b = 0$ donne comme tout à l'heure comme solutions tout l'axe réel (encore fois, pas de surprise, si z est réel, 1, z et $f(z)$ sont alignés sur l'axe réel), la parenthèse est une équation de cercle : $a^2 + b^2 - 2a - 1 = 0$ donne $(a-1)^2 - 1 + b^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire $(a-1)^2 + b^2 = 2$, soit un cercle de centre $A(1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 13 (**)

1. Il faut résoudre l'équation $\dfrac{z^2}{z-2i} = 1 + i$, soit $z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (1+i)^2 - 4(-2+2i) = 1 + 2i - 1 + 8 - 8i = 8 - 6i$. On recherche une racine carrée du discriminant sous la forme $\delta = a + ib$. La condition $\delta^2 = \Delta$ donne $a^2 - b^2 + 2iab = 8 - 6i$, soit $a^2 - b^2 = 8$ et $2ab = -6$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{36+64} = 10$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, on trouve $2a^2 = 18$, en les soustrayant $2b^2 = 2$. On en déduit que $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$, soit en utilisant le

fait que a et b sont de signe contraire (deuxième équation), $\delta = 3 - i$ ou $\delta = -3 + i$. Les deux solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{1 + i + 3 - i}{2} = 2$ et $z_2 = \dfrac{1 + i - 3 + i}{2} = i - 1$, qui sont donc les deux antécédents de $1 + i$ par f.

2. Le principe est le même : l'équation $f(z) = w$ se ramène à $z^2 - wz + 2iw = 0$, elle a toujours des solutions. Plus précisément, l'équation aura deux solutions, sauf si son discriminant est nul, auquel cas elle n'en aura qu'une. Le discriminant en question vaut $\Delta = w^2 - 8iw$, il s'annule lorsque $w = 0$ ou $w = 8i$. Les deux nombres complexes 0 et $8i$ ont donc un unique antécédent par f (il s'agit de 0 pour 0 et de $4i$ pour $8i$), tous les autres en ont deux.
3. L'application f est surjective (tout nombre complexe a au moins un antécédent, mais pas injective puisque beaucoup d'éléments ont deux antécédents par f.

Exercice 14 (**)

1. Le plus simple est d'expliciter l'application réciproque : si $Z = \dfrac{z+1}{z-2}$, alors $zZ - 2Z - z - 1 = 0$, soit $z = \dfrac{2Z+1}{Z-1}$. Cette application g, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, vérifie $f \circ g = id$ et $g \circ f = id$ (sur leurs ensembles de définition respectifs), ce qui prouve que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.
2. C'est en fait très simple : si $f(z) \in \mathbb{U}$, c'est que $|f(z)| = 1$, soit $|z + 1| = |z - 2|$. En posant $z = a + ib$ et en élevant tout au carré, on obtient $(a + 1)^2 + b^2 = (a - 2)^2 + b^2$, donc $2a + 1 = -4a + 4$, ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$. L'image réciproque de $\mathbb{U}$ est donc la droite des complexes de partie réelle $\dfrac{1}{2}$. Pour obtenir l'image réciproque du disque unité, il suffit de remplacer les égalités par des inégalités, on obtient la condition $a \leqslant \dfrac{1}{2}$, c'est -à-dire que z appartient à un demi-plan délimité par la droite précédente.
3. Il suffit de choisir parmi les nombres complexes de partie réelle $\dfrac{1}{2}$ ceux qui ont pour module 1. Il y en a deux, $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
4. Pour que $f(f(z))$ soit défini, on doit avoir $f(z) \neq 2$, c'est-à-dire au vu du calcul de la première question $z \neq \dfrac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5$. L'application $f \circ f$ est donc définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2; 5\}$. Elle est évidemment bijective pusique $g \circ g$ sera clairement sa réciproque. L'ensemble vers lequel f est bijective est donc le domaine de définition de $g \circ g$, qui est définie si $g(z) \neq 1$, donc si $z \neq f(1) = -2$. Finalement, $f \circ f$ est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{2; 5\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{-2; 1\}$.

Exercice 15 (***)

1. C'est très très simple, la réciproque de f est f elle-même puisque $f(f(z)) = z$ quel que soit z dans $\mathbb{C}^*$.
2. Si on part de $z = a + ib$, on peut écrire $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a + ib}{a^2 + b^2}$, donc $f(z)$ a une partie réelle strictement positive si $a > 0$, c'est-à-dire si z lui-même a une partie réelle strictement positive. Autrement dit, le demi-plan ouvert situé à droite de l'axe imaginaire pur est globalement invariant par f.
3. Prenons par exemple $A(1)$ et $B(i)$ (on peut choisir encore beaucoup plus simple). Le milieu de AB a pour affixe $\dfrac{1+i}{2}$, donc pour image $\dfrac{2}{1+i} = \dfrac{2(1-i)}{2} = 1 - i$. Pourtant, le milieu du segment $[A'B']$ reliant les images de A et B a pour affixe $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - i)$. Un mystérieux facteur $\dfrac{1}{2}$ est apparu, le mileu des images n'est pas l'image du milieu.

4. Il faut bien sûr supprimer 0 de chacun des deux axes. L'application f effectue une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même (c'est une propriété de la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. De même, $\dfrac{1}{ki} \in i\mathbb{R}$, et f est bijective de $i\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dans lui-même.
5. Une droite passant par l'origine peut être décrite comme l'ensemble des multiples réels d'un nombre complexe z donné (par exemple tous les multiples réels de $1+i$ forment la première bissectrice des deux axes). Soit donc une telle droite avec $z = a+ib$ fixé, si k est un réel non nul, $f(kz) = \dfrac{1}{k(a+ib)} = \dfrac{a-ib}{k(a^2+b^2)}$. Toutes ces images sont donc également situées sur une droite, celle constituée de tous les multiples réels de $\overline{z}$. Autrement dit, l'image d'une droite passant par l'origine est la symétrique de cette droite par rapport à l'axe réel.
6. Soit M un point d'affixe z appartenant à la droite (AB), on a donc $(\overline{z-z_A})(z-z_B) \in \mathbb{R}$, soit $\overline{z}z - z - i\overline{z} + i \in \mathbb{R}$, soit, en notant $z = a+ib$, $-b-a+1 = 0$, soit $b = 1-a$. On a donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib}$. Calculons la distance de cet inverse au point $C\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$: $\left|\dfrac{1}{a+ib} - \dfrac{1-i}{2}\right| = \left|\dfrac{2-(a+ib)(1-i)}{2(a+ib)}\right| = \left|\dfrac{2-a-b+i(-b+a)}{2(a+ib)}\right| = \left|\dfrac{1+i(-1+2a)}{2(a+ib)}\right|$ en utilisant la relation $b = 1_a$. On obtient donc, en élevant au carré, $\dfrac{1+(2a-1)^2}{4(a^2+b^2)} = \dfrac{1+1+4a^2-4a}{4(a^2+(1-a)^2)} = \dfrac{2-4a+4a^2}{8a^2-8a+4} = \dfrac{1}{2}$. Les points se trouvent donc tous sur le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Notons que $\left|\dfrac{1-i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Le cercle en question passe donc par l'origine du repère. Pour déterminer quels sont les points du cercle ayant un antécédent sur la droite, puisque f est sa propre réciproque, il suffit de déterminer les images des points du cercle : $\left|z - \dfrac{1-i}{2}\right|^2 = \dfrac{1}{2}$ ce qui donne en multipliant par 2 et en développant, $2z\overline{z} - (1+i)z - (1-i)\overline{z} + 1 = 1$. La simplification est bienvenue, en divisant tout par $z\overline{z}$ (on a déjà exclu 0), on trouve $2 - \dfrac{1+i}{\overline{z}} - \dfrac{1-i}{z} = 0$. Posons $Z = f(z) = \dfrac{1}{z}$, on a donc $2-(1+i)\overline{Z} - (1-i)Z = 0$. Ecrivons maintenant $Z = a+ib$, on a donc $2-(1+i)(a-ib)-(1-i)(a+ib) = 0$, soit $2-a+ib-ia-b-a-ib+ia-b = 0$, soit $2-2a-2b = 0$. On retrouve exactement l'équation de la droite dont on est partis plus haut.
7. Il est plus simple de partir de l'équation d'un cercle passant par l'origine, de la forme $|z-z_D|^2 = |z_D|^2$, où D est le centre du cercle. En développant, on trouve $z\overline{z} - z_D\overline{z} - \overline{z_D}z = 0$ (le reste se simplifie). En posant $Z = \dfrac{1}{z}$ et en faisant la même manipulation que ci-dessus, on trouve donc $1 - z_D Z - \overline{z_D Z} = 0$. Autrement dit $1 = 2\text{Re}\,(z_D Z)$, soit en notant $Z = a+ib$ et $z_D = x+iy$, $2ax - 2by = 1$. C'est l'équation d'une droite (qui ne peut pas passer par l'origine), et toute droite ne passant pas par l'origine peut se mettre sous cette forme. Comme f est sa propre réciproque, l'image d'une droite ne passant pas par l'origine est donc toujours un cercle passant par l'origine.
8. On a déjà répondu à cette question lors du calcul précédent, c'est une droite ne passant pas par l'origine.
9. On sait que $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. L'image du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même. Pour un cercle de centre r centré en l'origine, on considère des nombres complexes z de la forme $re^{i\theta}$, qui ont des inverses de la forme $\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. L'image du cercle est donc également un cercle de centre O, mais de rayon $\dfrac{1}{r}$.
10. Partons de son équation $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + k = 0$ (où k est un réel non nul quand le cercle ne passe pas par l'origine). En divisant tout par $z\overline{z}$ et en posant $Z = \dfrac{1}{z}$, on obtient $1 - aZ - \overline{a}\overline{Z} + kZ\overline{Z} =$

0, soit $k\left|Z-\dfrac{\overline{a}}{k}\right|^2 = k'$, où k' est toujours une constante (mais plus égale à k). On retombe donc sur une équation de cercle de centre d'afixe $\dfrac{\overline{a}}{k}$. en tout cas, l'image d'un cercle qui ne passe pas par l'origine est un cercle (ne passant pas par l'origine non plus pusiqu'en appliquant la réciproque égale à f il faut retomber sur le cercle initial). Globalement, on a prouvé dans cet exercice que l'ensemble des droites et des cercles du plan est globalement invariant par cette opération d'inversion.

Exercice 16 (****)

Le coloriage est impossible. Effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons un tel coloriage réalisé et considérons un losange $ABCD$ dont les quatre côtés ont pour longueur 1, la petite diagonale pour longueur 1 également et la grande diagonale pour longueur $\sqrt{3}$ (il suffit pour cela d'accoler deux triangles équilatéraux). Supposons par exemple que les sommets A et C soient opposés par la grande diagonale. Si A est par exemple colorié en vert, B et D doivent être de couleur non verte puisqu'à distance 1 de A, et de couleur différente puisqu'eux-même sont à distance 1 l'un de l'autre. Ils sont donc coloriés en bleu et rouge. Cela impose à C d'être de couleur verte puisqu'il est à distance 1 de B et D. Ainsi, on voit que les deux points A et C, qui sont à distance $\sqrt{3}$ l'un de l'autre, sont de même couleur. Cette construction permet de prouver que deux points à distance $\sqrt{3}$ seront toujours de la même couleur, car on peut les placer comme sommets opposés par la grande diagonale d'un losange tel qu'étudié ci-dessus. Considérons maintenant un cercle de rayon $\sqrt{3}$. Tous les points de ce cercle sont de la même couleur que le centre du cercle au vu du raisonnement précédent, donc sont tous de la même couleur. Or, sur ce cercle, on peut certainement trouver deux points à distance 1 l'un de l'autre. Ces deux points étant de la même couleur, on est en contradiction avec notre hypothèse, qui est donc irréalisable.

Problème 1 : étude d'une application complexe (**)

1. (a) On doit donc résoudre l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $z = 2z(1-z)$, ou encore $z(1-2+2z) = 0$. On trouve donc deux valeurs possibles : $z = 0$ et $z = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Commençons par résoudre $f(z) = -4$, soit $-2z^2 + 2z + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet deux racines $z_1 = \dfrac{-2+6}{-4} = -1$, et $z_2 = \dfrac{-2-6}{-4} = 2$.

   Passons à $f(z) = 2 + 2i$, qui donne $-2z^2 + 2z - 2 - i = 0$, qu'on peut écrire plus simplement $z^2 - z + 1 + i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. On peut ajouter la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b doivent être de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$. On obtient alors comme antécédents $z_1 = \dfrac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $z_2 = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$.

2. Examinons la condition $f(z_1) = f(z_2)$: $2z_1 - 2z_1^2 = 2z_2 - 2z_2^2$, soit en divisant tout par deux $z_1 - z_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$. Si on exclut le cas peu intéressant $z_1 = z_2$, on peut diviser par $z_1 - z_2$ pour obtenir $1 = z_1 + z_2$, soit $z_2 = 1 - z_1$. Autrement dit, $z_2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - z_1$, ce qui signifie que les points d'affixe z_1 et z_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$. En particulier, l'application n'est pas injective puisque, sauf dans l'unique cas particulier

$z = \dfrac{1}{2}$, il existe toujours un deuxième nombre complexe ayant la même image par f qu'un nombre complexe donné. Pour faire très simple, on peut d'ailleurs se contenter de reprendre le résultat de la première question, et dire que $f(-1) = f(2)$.

3. L'équation $f(z) = a$, où $a \in \mathbb{C}$, est une équation de second degré, elle aura toujours des solutions. Tout nombre complexe a donc au moins un antécédent par f. Le nombre a aura un seul antécédent si l'équation $2z - 2z^2 = a$ a un discriminant nul, soit $4 - 8a = 0$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. Le nombre réel $\dfrac{1}{2}$ est donc le seul à avoir un unique antécédent (en l'occurence lui-même).

4. (a) Calculer l'image de l'axe réel est étrangement plus compliqué que pour image réciproque (question suivante), si $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $f(x) = 2x(1-x) \in \mathbb{R}$. Pour déterminer précisément quelles sont les valeurs prises par cette fonction, on peut l'étudier avec les techniques classiques sur les fonctions d'une variable réelle. Ainsi, $f'(x) = -4x+2$ s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, on obtient pour f le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

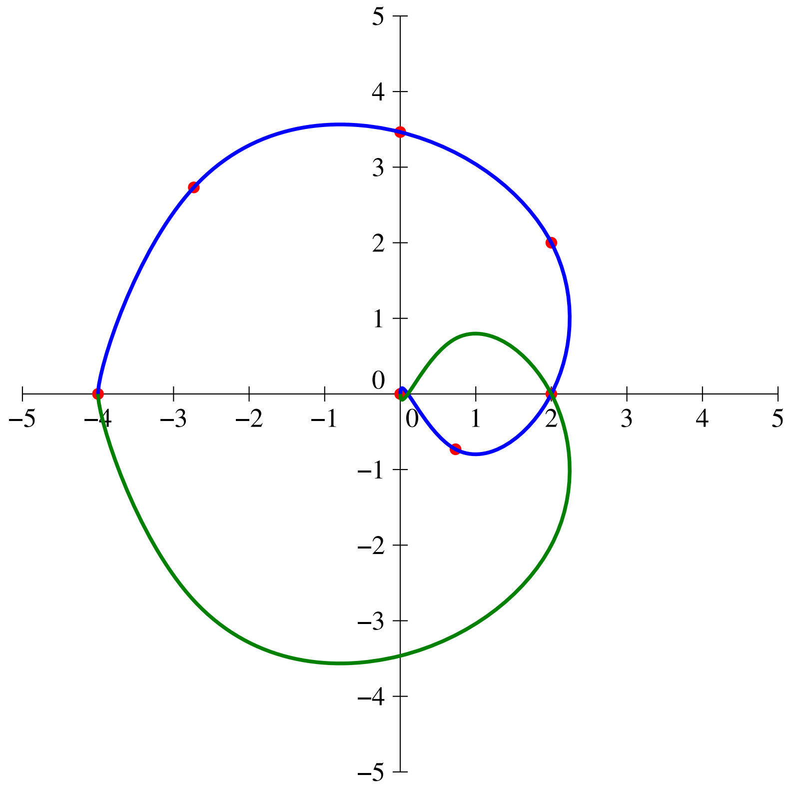
La fonction f prend donc sur l'axe réel toutes les valeurs réelles inférieures à $-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

(b) Allons-y peu subtilement. Si on pose $z = a + ib$, on a $f(z) = 2(a+ib)(1-a-ib) = 2(a - a^2 - iab + ib - iab + b^2)$, qui est réel si $b - 2ab = 0$, soit $b(1-2a) = 0$. On peut donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire que z est un réel), ou $a = \dfrac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe imaginaire).

5. (a) Calculons $f(e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$

$= 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta-\pi}{2}}$. En particulier, on trouve un module égal à $4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (en prenant $\theta \in [0; 2\pi]$ pour toujours avoir un sinus de l'angle moitié positif) et un argument de $\dfrac{3\theta - \pi}{2}$.

(b) Pour $\theta = 0$, $f(e^{i\theta}) = f(1) = 0$; pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, le module vaut $4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et l'argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. On peut aussi calculer directement $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, on a un module $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$, et un argument de $\dfrac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2$. Ensuite, si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, module $2\sqrt{2}$ et argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(e^{i\theta}) = 2 + 2i$. On enchaine avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, module $2\sqrt{3}$, argument $\dfrac{1}{2}(2\pi - \pi) = \dfrac{\pi}{2}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{3}i$. Pour $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$, module $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15\pi}{6} - \pi\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Enfin, pour $\theta = \pi$, $f(-1) = -4$. Ce qui donne une allure ressemblant à ceci (les points sont en rouge, la courbe en bleu, ça doit ressembler à une sorte de spirale, en vert la symétrique pour l'autre moitié de cercle trigonométrique) :



(c) Il suffit de calculer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$: le module est le même que pour $f(e^{i\theta})$, l'argument vaut $\dfrac{3(2\pi-\theta)-\pi}{2} = \dfrac{5\pi-3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta-\pi}{2}+2\pi$, donc l'argument est opposé à celui de $f(e^{i\theta})$. Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.

Problème 2 : résolution d'équations du troisième degré (***)

I. Un cas particulier

1. Puisque $z = Z+2$, on peut écrire $(Z+2)^3 - 6(Z+2)^2 + 9(Z+2) - 1 = 0$, soit $Z^3 + 6Z^2 + 12Z + 8 - 6Z^2 - 24Z - 24 + 9Z + 18 - 1 = 0$, donc $Z^3 - 3Z + 1 = 0$.
2. Encore du calcul peu subtil, $(u+v)^3 - 3(u+v) + 1 = 0$ donne $u^3+3u^2v+3uv^2+v^3-3u-3v+1 = 0$. En factorisant ce qu'on peut par $u+v$, $u^3+v^3+3uv(u+v)-3(u+v)+1 = 0$, ce qui donne bien $u^3+v^3+3(uv-1)(u+v)+1 = 0$.
3. Si on impose $uv = 1$, on a donc $u^3+v^3+1 = 0$, soit $u^3+v^3 = -1$. Comme par ailleurs $u^3v^3 = (uv)^3 = 1^3 = 1$, on connait le produit P et la somme S des deux nombres u et v, ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$, soit ici $x^2+x+1 = 0$.
4. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$, et admet donc pour racines complexes conjuguées $x_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $x_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc poser $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ou le contraire, ça n'a aucune importance). Les valeurs possibles pour u sont donc les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, c'est-à-dire $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $u_2 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$. De même, les valeurs possibles de v sont $v_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$; $v_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $v_3 = e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.
5. Avec la condition ajoutée $uv = 1$, les trois couples possibles sont (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) et (u_3, v_3), qui donnent donc les trois valeurs possible de Z : $Z_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $Z_2 = u_2 + v_2 =$

$2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $Z_3 = u_3 + v_3 = 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_1 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$; $z_2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $z_3 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$. Remarquons que, malgré l'utilisation des nombres complexes, on obtient ici trois solution réelles.

II. Généralisation

1. Développons comme précédemment $(Z-k)^3 + a(Z-k)^2 + b(Z-k) + c = Z^3 - 3kZ^2 + 9k^2Z - k^3 + aZ^2 - 2akZ + ak^2 + bZ - bk + c = Z^3 + (a-3k)Z^2 + (9k^2 - 2ak + b)Z - k^3 + ak^2 - bk + c$. Si on veut faire disparaitre le terme en Z^2, il suffit de prendre $k = \dfrac{a}{3}$. On obtiendra alors $p = 9k^2 - 2ak + b = a^2 - 2\dfrac{a^2}{3} + b = \dfrac{a^2}{3} + b$; et $q = -k^3 + ak^2 - bk + c = -\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{ab}{3} + c = -\dfrac{2a^2}{27} + \dfrac{ab}{3} + c$.
2. On procède comme dans la première partie : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ donne $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$, soit $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$. En posant $uv = -\dfrac{p}{3}$, on fait disparaitre le terme du milieu pour mettre sous la forme demandée.
3. Comme tout à l'heure, on a $U + V = -q$, et $UV = (uv)^3 = -\dfrac{p^3}{27}$.
4. Les nombres U et V sont donc solutions de l'équation $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27}$, qui a pour discriminant $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$. Si $\Delta > 0$, on trouvera donc $U = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ et $V = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta < 0$, on aura des valeurs complexes conjuguées $U = -\dfrac{q}{2} + i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$, et $V = -\dfrac{q}{2} - i\sqrt{-\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}$. Si $\Delta = 0$, on aura $U = V$, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la résolution. On cherche ensuite les racines cubiques (complexes) des deux nombres U et V, on les apparie de façon à avoir un produit égal à $-\dfrac{p}{3}$ (il y aura toujours trois couples possibles), en calculant les sommes $u + v$ pour chacun des trois couples on trouve trois valeurs possibles pour Z, qui donnent les trois solutions $z = Z + k$.
5. Allons-y en commençant par poser $Z = z - 1$, on a donc $(Z+1)^3 - 3(Z+1)^2 + (9-6i)(Z+1) - 5 + 12i = 0$, soit $Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1 - 3Z^2 - 6Z - 3 + (9-6i)Z + 9 - 6i - 5 + 12i = 0$. En regroupant un peu, $Z^3 + 6(1-i)Z + 2 + 6i = 0$. On pose maintenant $Z = u + v$ pour obtenir $u^3 + 3u^3v + 3uv^2 + v^3 + 6(1-i)(u+v) + 2 + 6i = 0$, soit $u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv + 2(1-i)) + 2 + 6i = 0$. On va donc imposer la condition supplémentaire $uv = 2i - 2$, et poser $U = u^3$ et $V = v^3$ pour obtenir les équations $U + V = -2 - 6i$, et $UV = (2i-2)^3 = -8i + 24 + 24i - 8 = 16 + 16i$. Les nombres U et V sont solution de l'équation du second degré $x^2 + (2+6i)x + 16 + 16i = 0$. Son discriminant est égal à $\Delta = (2+6i)^2 - 64 - 64i = 4 + 24i - 36 - 64 - 64i = -96 - 40i$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les conditions $a^2 - b^2 = -96$ et $2ab = -40$. On a alors le choix entre être très courageux et calculer le module de Δ (qui vaut 104), ou bien être observateur et remarquer que $a = 2$ et $b = -10$ est un couple solution. On peut donc prendre $\delta = 2 - 10i$, et trouver les solutions $U = \dfrac{-2 - 6i + 2 - 10i}{2} = -8i$ et $V = \dfrac{-2 - 6i - 2 + 10i}{2} = -2 + 2i$. Ouf, on obtient deux nombres dont les racines cubiques sont faciles à calculer. Pour u, on peut prendre $u_1 = 2i$, $u_2 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$ et $u_3 = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$. Pour $V = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, on obtient $v_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $v_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $v_3 = (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} =$

$(1+i)\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+i\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Comme $2i(1+i)=-2+2i$, le couple (u_1,v_1) est une solution correcte, qui mène à $Z=u_1+v_1=1+3i$. De même, $u_2+v_3=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}\times(1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}}=-2+2i$, donc $Z=u_2+v_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$ convient. Enfin, la troisième possibilité est $Z_3=u_3+v_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$. On en déduit aisément les solutions de l'équation initiale en se souvenant que $z=Z+1$: $z_1=2+3i$; $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$.

Problème 3 : homographies du plan complexe (***)

I. Un cas particulier

1. L'application est évidemment définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Essayons donc de déterminer sa réciproque, posons $Z=f(z)=\dfrac{iz-1}{z+1}$, alors $Zz+Z=iz-1$, soit $z(Z-i)=-1-Z$, ou encore $z=\dfrac{Z+1}{i-Z}$. Cette expression n'a un sens que si $Z\neq i$, et donne dans ce cas la valeur de l'unique antécédent par f de Z. L'application f est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.
2. Calculons donc $f(2)=\dfrac{2i-1}{3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$; et $f(1+i)=\dfrac{i-1-1}{2+i}=\dfrac{(i-2)(2-i)}{5}=\dfrac{-3+4i}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$. Pour les antécédents, on peut exploiter le calcul de la question précédente, on connait déjà la réciproque de f. L'unique antécédent de 2 sera donc égal à $\dfrac{3}{i-2}=\dfrac{3(i+2)}{-5}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}i$. Celui de $1+i$ est donné par $\dfrac{2+i}{-1}=-2-i$.
3. On cherche à résoudre l'équation $f(z)=z$, soit $z(z+1)=iz-1$, ou encore $z^2+(1-i)z+1=0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta=(1-i)^2-4=-2i-4$. On cherche $\delta=a+ib$ tel que $\delta^2=\Delta$, ce qui donne les deux conditions $a^2-b^2=-4$ et $ab=-2$. En ajoutant la condittion sur le module, on obtient la troisième équation $a^2+b^2=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. En soustrayant et additionnant les équations extrêmes, on a $2a^2=2\sqrt{5}-4$ et $2b^2=2\sqrt{5}+4$, ce qui permet de choisir en constatant que a et b sont de signe contraire $\delta=\sqrt{\sqrt{5}-2}-i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. On trouve alors deux points invariants par f : $z_1=\dfrac{i-1+\delta}{2}$ et $z_2=\dfrac{i-1i\delta}{2}$ (qu'on peut écrire entièrement si on le souhaite, mais ça n'a pas grand intérêt).
4. Posons $z=a+ib$, on a alors $f(z)=\dfrac{ai-b-1}{a+ib+1}=\dfrac{(ai-b-1)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2}$ $=\dfrac{a^2i+ai+ab-ab-b+ib^2-a-1+ib}{(a+1)^2+b^2}=\dfrac{-b-a-1+i(a^2+b^2+a+b)}{(a+1)^2+b^2}$. Pour avoir une image réelle, z doit donc vérifier $a^2+b^2+a+b=0$, soit $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=0$. On reconnait l'équation d'un cercle de centre $A\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que l'image de z soit imaginaire pure, on doit avoir $-b-a-1=0$, soit $b=-a-1$, donc z appartient à une droite du plan, d'équation $y=-x-1$.
5. Pour avoir $f(z)\in\mathbb{U}$, il suffit d'avoir $|iz-1|=|z+1|$. En posant $z=a+ib$ et en élevant tout au carré, on trouve la condition $|ia-b-1|^2=|a+ib+1|^2$, soit $(-b-1)^2+a^2=(a+1)^2+b^2$. On développe tout : $b^2+1+2b+a^2=a^2+2a+1+b^2$, soit très simplement $a=b$. Les nombres complexes ayant une image de module 1 sont donc situés sur la première bissectrice des axes (on vérifie par exemple que c'est le cas pour $1+i$ dont on a calculé l'image plus haut : $\left|-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right|=\sqrt{\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}}=1$).

6. On n'arrive pas à grand chose à partir de l'expression de $f(z)$. Mieux vaut repartir de la réciproque : en posant $Z = c + id$, $\dfrac{Z+1}{i-Z} = \dfrac{c+1+id}{-c+i(1-d)} = \dfrac{(c+1+id)(-c-i+id)}{c^2+(1-d)^2} = \dfrac{-c^2-ic+icd-c-i+id-icd+d-d^2}{c^2+(1-d)^2} = \dfrac{-c^2-c+d-d^2+i(-c-1+d))}{c^2+(1-d)^2}$. Les images des nombres ayant une partie imaginaire strictement positive sont les Z ayant un antécédent dont la partie imaginaire est positive, donc vérifiant $-c-1+d > 0$, autrement dit $c+1 < d$. Il s'agit du demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$ dans le plan complexe.

II. Une étude plus générale

1. Prenons donc un $z \in \mathbb{U}$, qui peut s'écrire sous la forme $e^{i\alpha}$. On a alors $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \in \mathbb{U}$.
2. Comme $a \notin \mathbb{U}$, on ne peut pas avoir $|\overline{a}| = 1$, donc $|\overline{a}e^{i\alpha}| \neq 1$. En particulier, $\overline{a}e^{i\alpha} \neq -1$, donc le dénominateur ne peut pas s'annuler si $z \in \mathbb{U}$. L'application est donc définie sur $\mathbb{U}$. Cherchons désormais à calculer $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z+1|} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{a}z\overline{z}+\overline{z}|} \times |\overline{z}|$. Le nombre z étant de module 1, $|\overline{z}| = 1$ et $z\overline{z} = 1$ donc $|f(z)| = \dfrac{|z+a|}{\overline{a}+\overline{z}} = \dfrac{|z+a|}{|\overline{z+a}|} = 1$, donc $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Écrivons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$, on a donc $|\alpha+\beta|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$. Or, $|\alpha|^2 = a^2+b^2$, $|\beta|^2 = c^2+d^2$ et $\overline{\alpha}\beta = (a-ib)(c+id) = ac+bd+i(ad-bc)$ a pour partie réelle $ac+bd$, ce qui donne bien la formule annoncée.
   (b) Par hypothèse, on doit avoir $|f(e^{i\theta})| = 1$, c'est-à-dire $|ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|$. En élevant au carré et en utilisant la question précédente, $|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\ (\overline{ae^{i\theta}}b) = |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\ (\overline{ce^{i\theta}}d)$, soit en effet $|a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\ (\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathrm{Re}\ (\overline{c}de^{-i\theta})$.
   (c) Écrivons le nombre β sous forme exponentielle $\beta = re^{i\mu}$. Pour $\theta = \mu$, on a $\beta e^{-i\theta} = re^{i\mu}e^{-i\mu} = r$, donc $2\mathrm{Re}\ (\beta e^{-i\theta} = 2r$, et on doit donc avoir $\alpha + 2r = 0$. Si au contraire on prend $\theta = \mu+\pi$, on trouve $\beta e^{-i\theta} = re^{-i\pi} = -r$, donc on trouve la condition $\alpha - 2r = 0$. En additionnant ces deux équations, on trouve que $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$, puis $2r = 0$, soit $|\beta| = 0$, ce qui implique $\beta = 0$.
   Or, en faisant passer tout à gauche dans l'égalité de la question précédente, $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + 2\mathrm{Re}\ ((\overline{a}b - \overline{c}d)e^{-i\theta}) = 0$. En appliquant le calcul qu'on vient d'effectuer, on a $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$ (c'est ce qui joue le rôle de α) et $\overline{a}b - \overline{c}d = 0$ (c'est notre β).
   (d) Si $a = 0$, la deuxième condition ci-dessus devient $\overline{c}d = 0$, donc on a soit $c = 0$ soit $d = 0$. Or on a supposé dès le départ que $ad - bc \neq 0$, donc on ne peut pas avoir à la fois $a = 0$ et $c = 0$. Il ne reste que la possibilité $d = 0$, dont on déduit $|b| = |c|$. On peut alors écrire que $\dfrac{b}{c} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\dfrac{b}{c} = e^{i\theta}$. On en déduit que $f(z) = \dfrac{b}{cz} = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$, qui est bien de la forme étudiée à la première question.
   (e) Si $a \neq 0$, on peut écrire $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en exploitant notre deuxième condition. En remettant dans la première, $|a|^2 + \left|\dfrac{\overline{c}^2d^2}{\overline{a}^2}\right| = |c|^2 + |d|^2$, soit en multipliant tout par $|\overline{a}|^2$ (qui est égal à $|a|^2$), $|a|^4 + |c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2 + |a|^2|d|^2$. On fait tout passer de l'autre côté et on peut factoriser : $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Celà implique bien $|a|^2 = |c|^2$ (donc $|a| = |c|$ puisqu'on parle de réels positifs), ou $|a|^2 = |d|^2$.
   (f) Supposons donc que $|a| = |c|$, soit $a = ce^{i\theta}$. On a alors $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{c}e^{-i\theta}} = de^{i\theta}$. Mais on a alors $ad - bc = cde^{i\theta} - cde^{i\theta} = 0$, ce qui est interdit ! On a donc $|a| = |d|$, soit $a = de^{i\theta}$, et $b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}$ donc $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{de^{i\theta}z + \frac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}}{cz+d} = e^{i\theta}\dfrac{z+\frac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\frac{c}{d}z+1}$, qui est exactement de

la forme étudiée à la deuxième question en posant $a = \frac{\overline{c}}{\overline{d}}$.