Exercice à travailler n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2020

Application d'une diagonalisation à la résolution d'un système différentiel.

1. Il suffit de poser $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si on note (a, b, c) les coordonnées du vecteur (ligne) u_1, on doit donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} a + 4b - 4c = a \\ 3a + 2b - 4c = b \\ 3a - 3b + c = c \end{cases}$. La première équation donne $b = c$, et la dernière $a = b$, la deuxième devient alors $b = b$, ce qui est évident toujours vérifié. On peut donc choisir par exemple $u_1 = (1, 1, 1)$. Pour u_2, on garde les mêmes notations (a, b, c) pour les coordonnées et on résout maintenant $\begin{cases} a + 4b - 4c = -2a \\ 3a + 2b - 4c = -2b \\ 3a - 3b + c = -2c \end{cases}$. Les deux premières équations sont identiques : $3a + 4b - 4c = 0$. En soustrayant la troisième équation on trouve $7b - 7c = 0$, soit $b = c$. On en déduit $a = 0$ et on choisit donc $u_2 = (0, 1, 1)$. Reste à déterminer u_3 selon la même méthode, en résolvant $\begin{cases} a + 4b - 4c = 5a \\ 3a + 2b - 4c = 5b \\ 3a - 3b + c = 5c \end{cases}$. La première équation peut s'écrire $b = a + c$, ce qui en remplaçant dans les deux autres donne $-7c = 0$ et $-7c = 0$. Bon ben donc $c = 0$ et on prend $u_3 = (1, 1, 0)$.

3. On écrit les coordonnées de nos trois vecteurs en colonnes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on peut nommer la matrice P puisqu'il s'agira bien entendu de la matrice de passage demandée juste après). Pour calculer le déterminant de P, on peut par exemple effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ puis développer par rapport à la deuxième ligne : $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Ce déterminant étant non nul, notre famille est bien une base.

4. Si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M, résoudre l'équation $MU_1 = U_1$ revient exactement à chercher un vecteur vérifiant $f(u_1) = u_1$. De même, on aura $f(u_2) = -2u_2$ et $f(u_3) = 5u_3$. Autrement dit, les trois vecteurs sont des vecteurs propres pour l'application f, et la matrice de f dans la base constituée de ces trois vecteurs est donc diagonale (avec 1, -2 et 5 comme coefficients diagonaux). Or, la matrice de f dans cette base n'est autre que $P^{-1}MP$! Donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Il suffit de partir de l'équation $X'(t) = MX(t)$ et de multiplier à gauche par P^{-1}. On a donc $P^{-1}X'(t) = P^{-1}MX(t)$. Or on a posé $Y(t) = P^{-1}X(t)$, donc $X(t) = PY(t)$ (et de même

$X'(t) = PY'(t)$), donc l'équation peut s'écrire $P^{-1}PY'(t) = P^{-1}MPY(t)$, ce qui donne bien $Y'(t) = DY(t)$.

6. Notons $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$, et donc $Y'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix}$. Comme la matrice D est diagonale , l'équation $Y'(t) = DY(t)$ se traduit en fait par un système de trois équations indépendantes : $\begin{cases} a'(t) &= a(t) \\ b'(t) &= -2b(t) \\ c'(t) &= 5c(t) \end{cases}$. Chacune de ces équation est une équation homogène du premier ordre à coefficients constants qui se résout immédiatement si on n'a pas complètement son cours sur les équations différentielles (ce qui serait évidemment très fâcheux). On a $a(t) = \alpha e^t$, $b(t) = \beta e^{-2t}$ et $c(t) = \gamma e^{5t}$, où α, β et γ sont trois constantes réelles. Il suffit de faire le produit à gauche de $Y(t)$ par la matrice P pour en déduire que $x(t) = \alpha e^t + \gamma e^{5t}$; $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} + \gamma e^{5t}$ et $z(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t}$, avec toujours $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
7. Les conditions initiales imposent que nos trois constantes soient solutions du système $\begin{cases} \alpha & & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 3 \end{cases}$. En soustrayant la première et la troisième équation à la deuxième, on trouve les deux valeurs $\beta = 1$ et $\gamma = -1$, et on en déduit $\alpha = 2$. Il ne reste plus qu'à conclure : $x(t) = 2e^t - e^{5t}$, $y(t) = 2e^t + e^{-2t} - e^{5t}$ et $z(t) = 2e^t + e^{-2t}$.