Exercice à travailler n°13

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2020

Application d'une diagonalisation à la résolution d'un système différentiel.

On cherche aujourd'hui à résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & x(t) & + & 4y(t) & - & 4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) & + & 2y(t) & - & 4z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) & - & 3y(t) & + & z(t) \end{array}\right.$, c'est-à-dire à déterminer tous les triplets de fonctions (x, y, z) dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant ces trois relations. On notera pour la suite de l'exercice $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

1. Réécrire le système différentiel sous la forme d'une équation matricielle $X'(t) = M \times X(t)$, où M est une matrice carrée à préciser.
2. Déterminer trois vecteurs-colonnes non nuls U_1, U_2 et U_3 vérifiant respectivement $MU_1 = U_1$, $MU_2 = -2U_2$ et $MU_3 = 5U_3$. On notera u_1, u_2 et u_3 les vecteurs lignes correspondants.
3. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple en calculant un déterminant !), donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3).
4. Expliquer pourquoi $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, et préciser cette matrice diagonale, qu'on notera désormais D.
5. On note désormais $Y(t) = P^{-1}X(t)$, vérifier que le vecteur-colonne $Y(t)$ est solution de l'équation $Y'(t) = D \times Y(t)$, où $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ est constitué des dérivées des fonctions présentes dans le vecteur $Y(t)$.
6. En déduire $Y(t)$ (normalement ce sont maintenant des choses qu'on sait très bien résoudre !) puis $X(t)$.
7. Déterminer l'unique solution du système différentiel vérifiant les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 3$.